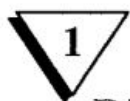


ENONCES



Vrai – faux

Dire si l'affirmation est vraie ou fausse

Justifier cette réponse.

- 1) Toute suite bornée est convergente
- 2) Si pour tout $n \geq 1$, $u_n \leq \frac{1}{n}$ $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$
- 3) La suite u définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = (0,99)^n$ converge vers 0.
- 4) La suite w définie sur $\mathbb{N}$ par $w_n = \sin n$ est divergente.
- 5) Si une suite géométrique u de raison $q > 1$ alors u pour limite $+\infty$.
- 6) Si u est une suite quelconque et v une suite qui converge vers 0 alors la
Limite $u \cdot v$ converge vers 0.
- 7) Si une suite u est croissante alors u a pour limite $+\infty$.
- 8) u une suite définie sur $\mathbb{N}$, à termes positif
et v une suite définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = \frac{u_n}{1+u_n}$ Si u converge alors v converge.



Q.C.M

Indiquer la bonne réponse a, b ou c avec justification.

- 1) u est la suite définie par $u_n = \frac{n+1}{2n+5}$ alors u a pour limite.
 a) $\frac{1}{5}$ b) $\frac{1}{2}$ c) $+\infty$
- 2) u est la suite définie par $u_n = 5 + \frac{(-1)^n}{n+1}$ u a pour limite.
 a) 0 b) 5 c) $-\infty$
- 3) V la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $V_n = (-1)^n \cdot n^4$ la suite V .
 a) n 'a pas de limite b) diverge vers $+\infty$
 c) diverge vers $-\infty$
- 4) Pour tout $n \geq 1$, $u_n = \frac{\sin n}{n}$
 a) n 'admet pas la limite b) converge vers 0 c) diverge vers $+\infty$.
- 5) u la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_0 = 0$
 et pour tout entier n , $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{n+1}$
 a) u est croissante b) u est une suite arithmétique
 c) u converge vers 2.
- 6) Pour tout entier naturel n , $u_n < 2$ alors :

a) La suite u est convergente

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} u_n = 2$

c) la suite u est majorée par 2.

3

Déterminer les limites éventuelles de chaque suite (u_n) définie sur n , par le terme général.

1) $u_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n + 2$

2) $u_n = \frac{3}{5^n}$

3) $u_n = (-7)^n$

4) $u_n = \left(-\frac{3}{2}\right)^{n+2}$

5) $u_n = (\cos 3)^n + 1$

6) $u_n = n^2 + n + \frac{1}{n^2} (n \in \mathbb{N}^*)$

4

En utilisant le théorème de comparaison,
Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} u_n$ dans chaque cas :

1) $u_n = \frac{\cos n}{2n + 3}$

2) $u_n = \frac{\sin(n) + 2}{n^2 + 1}$

3) $u_n = \frac{(-1)^n + 7}{4n^2 + 3}$

4) $u_n = n + \cos n$

5

Etudier la convergente des suites définie sur $\mathbb{N}$ par :

a) $u_n = \frac{1+2^n}{3^n}$

b) $u_n = (1-\sqrt{2})^n$

c) $u_n = n^2 + (1,5)^n$

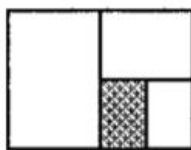
6

A partir d'un carré de côté 1, on construit les rectangles colorés suivants :

Etape 1



Etape 2



Etape 3



A chaque étape, les segments construits relient les milieux de deux segment opposés.

a) Calculer l'aire S_n de la surface colorée à l'étape n .

b) Déterminer la limite de la suite $(S_n)_{n \geq 1}$. Déduire.

7

La suite (U_n) définie par : $U_0 = -2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} = U_n + n^2 - n$

1) Montrer qu'à partir d'un certain rang : $U_n > n$

2) En déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} U_n$.



Soit la suite (V_n) définie sur $\mathbb{N}$ par
$$\begin{cases} V_0 = 1; V_1 = 3 \\ V_{n+2} = aV_{n+1} + (1-a)V_n \end{cases}$$

Et soit la suite (W_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $W_n = V_{n+1} - V_n$.

- 1) a) Montrer que (W_n) est une suite géométrique.
 b) Exprimer W_n en fonction de n .
 c) Déterminer l'ensemble E des réels a pour lesquels $\lim_{n \rightarrow +\infty} W_n = 0$
- 2) Dans la suite on donne $a = \frac{5}{3}$.

a) Montrer la récurrence que : pour tout $n \in \mathbb{N}; V_n = 7 \cdot 6 \left(\frac{2}{3}\right)^n$.

b) Calculer la fonction de n ; $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} W_k$, puis retrouver l'expression de V_n en fonction de n .

c) Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n$.

d) Calculer en fonction de n , $S' = \sum_{k=0}^{n-1} V_k$.



Soit (U_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $U_0 = 1$ et $U_{n+1} = \frac{U_n + 8}{2U_n + 1}$

- 1) Calculer U_1, U_2, U_3 .
- 2) Soit f la fonction définie sur $\left]-\frac{1}{2}, +\infty\right[$ par $f(x) = \frac{x+8}{2x+1}$.
 - a) Tracer la courbe de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ et tracer la droite $\Delta: y = x$.
 - b) Construire à l'aide de la courbe de f et de Δ les points de l'axe $(O, \vec{i})$ d'abscisses respectifs U_0, U_1, U_2, U_3 .
 - c) Que peut-on prévoir de la limite de la suite (U_n) quand n tend vers $+\infty$.
- 3) Soit (V_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $V_n = \frac{U_n - 2}{U_n + 2}$.
 - a) Calculer V_0, V_1, V_2 .
 - b) Montrer que (V_n) est une suite géométrique que caractérisera.
 - c) Exprimer V_n en fonction de n et déterminer sa limite quand n tend $+\infty$
- 4) En déduire alors U_n en fonction de n et déterminer sa limite en $+\infty$.

10

* Approximation de $\sqrt{2}$ par des rationnels.

Soient $(U_n)_{n \geq 0}$ et $(V_n)_{n \geq 0}$ définie par $U_0 = 1$ et $V_0 = 2$

$$U_{n+1} = \frac{2U_n V_n}{U_n + V_n} \quad \text{et} \quad V_{n+1} = \frac{1}{2}(U_n + V_n).$$

1) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n > 0$ et $V_n > 0$.

2) Soit la suite $(W_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $W_n = V_n - U_n$.

a) Démontrer que $W_{n+1} = \frac{W_n^2}{2(U_n + V_n)}$.

b) Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $W_n \geq 0$.

c) Démontrer à l'aide de a) que $W_{n+1} \leq \frac{1}{2} W_n$.

d) Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $W_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

e) En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} W_n = 0$ et que $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} V_n$.

3) a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$; $U_{n+1} \geq U_n$.

b) Démontrer que $V_{n+1} V_n \leq 0$.

c) Montrer que la suite $t_n = U_n \cdot V_n$ est une suite constante égale à 2.

d) Déduire alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \sqrt{2}$.

e) Calculer U_4 et V_4 et en déduire un encadrement de $\sqrt{2}$ par deux rationnels.

11

Soit (U_n) la suite définie par $U_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$U_{n+1} = \frac{3U_n + 9}{2U_n}$$

1) Montrer que $U_{n+1} - 3$ et $U_n - 3$ sont de signes contraires.

En déduire que pour tout $p \in \mathbb{N}$ on a : $U_{2p} \leq 3 \leq U_{2p+1}$.

2) En déduire que si (U_n) converge alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = 3$.

3) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $U_n \geq 2$.

4) Montrer que pour tout $n \geq 2$, On a : $|U_n - 3| \leq \left(\frac{3}{4}\right)^{n-2}$.

5) En déduire que (U_n) converge et trouver sa limite.

12

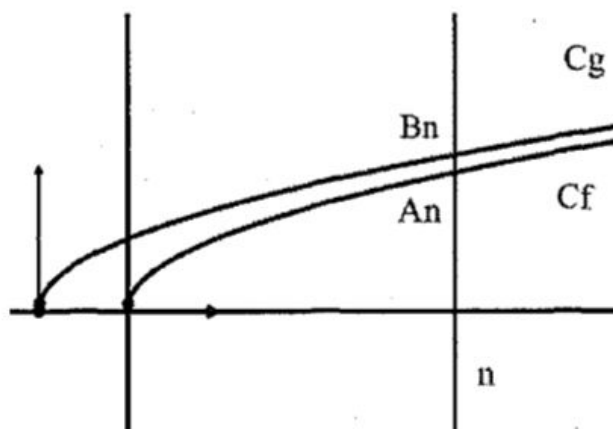
Soit f et g deux fonctions tel que :

$$f(x) = \sqrt{x} \text{ et } g(x) = \sqrt{x+1}$$

pour tout entier naturel n , on note A_n et B_n les points d'abscisse n qui appartiennent respectivement à ζ_f et ζ_g les courbes de f et g .

on pose $U_n = A_n B_n$

a) Conjecturer la limite de U



b) Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$; $U_n = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$

c) Montrer que pour tout $x \geq 1$, $0 \leq U_n \leq \frac{1}{2\sqrt{n}}$

d) En déduire la limite de (U_n)

13

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 1 + x + x^2 + \dots + x^n$ et g la fonction définie sur $\mathbb{R} - \{1\}$ par

$$g(x) = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$$

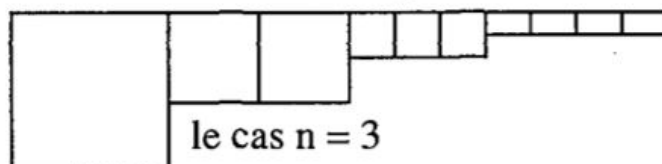
1) a) Calculer les dérivées des fonctions f et g .

b) En déduire que pour tout $a \neq 1$

$$1 + 2a + 3a^2 + \dots + na^{n-1} = \frac{na^{n+1} - (n+1)a^n + 1}{(a-1)^2}$$

2) On construit un carré de côté 1, deux carrés de côtés $\frac{1}{2}$, 3 carrés de côté

$\frac{1}{2^2}$, n carrés de côté $\frac{1}{2^{n-1}}$



le cas $n = 3$

On note A_n l'aire total de la figure obtenue.

a) Exprimer A_n en fonction de n .

b) On admet que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{4^n} = 0$. Démontrer que $(A_n)_{n \geq 1}$ converge vers un réel

que l'on précisera.

14 Dans une réserve, une population initiale de 1000 animaux évolue ainsi : 20% des animaux disparaissent (c'est le plan global de naissances et des décès) et on introduit 120 animaux supplémentaires.
 P_n est l'évolution de cette population au bout de n années.

- 1) Montrer que $P_{n+1} = 0,8 p_n + 120$
- 2) Représenter les 4 premiers termes de la suites (p_n) .
 La suite (p_n) est-elle convergente ?
- 3) On pose $V_n = P_n - 600$
 - a) Montrer que la suite (V_n) est une suite géométrique.
 - b) Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n$. En déduire la convergence de (p_n) .
- 4) Déterminer alors la valeur de stabilisation de cette population.
 Est elle rapide ?

15 Ali et Wadi sont jumeaux . Ali qui est fumeur , dépense 600 dinars par an pour l'achat de ses cigarettes. Wadi qui ne fume pas , lui demande d'imaginer les économies qu'il réaliserait s'il plaçait cette somme plutôt que de continuer à fumer.

Il lui propose de déposer tous les ans , le 1^{er} janvier , cette somme de 600 dinars sur une compte rémunéré à intérêts composés par la banque au taux annuel de 3 %. La banque ajoute chaque année, le 31 décembre, les intérêts acquis sur le compte.

Le 1^{er} janvier 1999, il verse 600 dinars et les intérêts acquis sont capitalisés le 31 décembre 1999. Tous les ans, le 1^{er} janvier, il verse de nouveau 600 dinars

- 1) Quelle est la somme disponible sur le livret aux dates suivantes ?
 - a) Le 3 janvier 2000.
 - b) Le 3 janvier 2001.
- 2) On note U_0 la somme disponible sur le livret le 3 janvier 1999 et on désigne par U_n la somme d'argent disponible sur le livret le 3 janvier de l'année 1999+ n .

Montrer qu'on a la relation $U_{n+1} = 1,03U_n + 600$

- 3) Soit (V_n) la suite d définie , pour tout entier naturel n , par $V_n = U_n + 20\,000$.
 - a) Montrer que la suite (V_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et la premier terme.
 - b) En déduire l'expression de V_n en fonction de n puis celle de U_n en fonction de n .
- 4) Wadi affirme qu'en moyenne , un fumeur s'arrête de fumer après avoir fumé pendant trente ans.

De quelle somme Ali aurait –il pu déposer le 3 janvier 2029 ?

CORRIGES



1) Faux : contre exemple $U_n = -1 \leq (-1)^n \leq 1$

(U_n) c'est une suite bornée mais n'est pas convergente.

2) Faux : contre exemple $U_n = -n^2$ on a $-n^2 < 0 < \frac{1}{n}$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = -\infty$

3) Vrai : $U_n = (0,99)^n$ est une suite géométrique de raison $q = 0,99 \in]-1, 1[$
donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = 0$ d'où (U_n) converge vers 0.

4) Vrai : $W_n = \sin n$ n'admet pas de limite à l'infini donc (W_n) est divergente.

5) Faux : $U_n = -(5)^n$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = -\infty$ car $q = 5 > 1$ et $U_0 = -1 < 0$

6) Faux : $U_n = n$ et $V_n = \frac{1}{n}$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = +\infty$ mais $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n \cdot V_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} n \cdot \frac{1}{n} = 1 \neq 0$

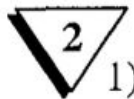
7) Faux : $U_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^n}$; $U_{n+1} - U_n = \frac{1}{2^{n+1}} > 0$ donc (U_n) est croissante.

$$U_n = \sum_{k=0}^n \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} = 2 \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right) \quad \frac{1}{2} \in]-1, 1[\text{ alors } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = 0$$

d'où $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = 2 \neq +\infty$

8) Vrai : si u converge alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \ell$ (ℓ finie) or $U_n \geq 0$ donc $\ell \geq 0$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{U_n}{1 + U_n} = \frac{\ell}{1 + \ell} \text{ d'où } (V_n) \text{ converge vers } \frac{\ell}{1 + \ell}$$



1) La réponse est ☒ : $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+1}{2n+5} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}$

2) La réponse est ☒ : on sait que $-1 \leq (-1)^n \leq 1$ alors $\frac{-1}{n+1} \leq \frac{(-1)^n}{n+1} \leq \frac{1}{n+1}$

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-1}{n+1} = 0$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} = 0$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = 5$

3) La réponse est ☒ : $V_n = (-1)^n \cdot n^4 = \begin{cases} n^4 & \text{si } n \text{ est pair} \\ -n^4 & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$

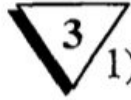
donc (V_n) n'admet pas de limites.

4) La réponse est **b** : on a $-1 \leq \sin n \leq 1 \Rightarrow \frac{-1}{n} \leq \frac{\sin n}{n} \leq \frac{1}{n}$

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{-1}{n} = 0$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sin n}{n} = 0$ d'où (U_n) converge vers 0.

5) La réponse est **a** : $U_{n+1} - U_n = \frac{1}{n+1} > 0$ alors (U_n) est croissante.

6) La réponse est **c** : $U_n < 2$ donc U_n est majorée par 2.



1) $(-\frac{1}{2})$ est une suite géométrique de raison $-\frac{1}{2}$

et $-\frac{1}{2} \in]-1, 1[$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} (-\frac{1}{2})^n = 0$ par suite $\lim_{n \rightarrow +\infty} (-\frac{1}{2})^n + 2 = 2$

2) $U_n = \frac{3}{5^n} = 3 \times (\frac{1}{5})^n$ est une suite géométrique de

raison $q = \frac{1}{5} \in]-1, 1[$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = 0$

3) $U_n = (-7)^n$ est une suite géométrique de raison $q = -7 < -1$
donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$ n'existe pas.

4) $U_n = (-\frac{3}{2})^{n+2} = (-\frac{3}{2})^2 \cdot (-\frac{3}{2})^n$ est une suite géométrique de raison $q = -\frac{3}{2} < -1$
donc (U_n) n'admet pas de limite.

5) $U_n = (\cos 3)^n + \frac{1}{n}$ or $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$ et $(\cos 3)^n$ est une suite géométrique
de raison $q = \cos 3 \in]-1, 1[$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\cos 3)^n = 0$ par suite $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = 0$

6) $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 + n + \frac{1}{n^2} = +\infty$ car $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 + n = \lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 = +\infty$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} = 0$



1) On a $-1 \leq \cos n \leq 1$ et $2n+3 > 0$ alors $\frac{-1}{2n+3} \leq \frac{\cos n}{2n+3} \leq \frac{1}{2n+3}$

et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2n+3} = \lim_{n \rightarrow +\infty} -\frac{1}{2n+3} = 0$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\cos n}{2n+3} = 0$

2) On a : $-1 \leq \sin n \leq 1$ alors $1 \leq 2 + \sin n \leq 3$ or $n^2 + 1 > 0$

alors $\frac{1}{n^2+1} \leq \frac{2+\sin n}{n^2+1} \leq \frac{3}{n^2+1}$

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2+1} = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3}{n^2+1} = 0$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2+\sin n}{n^2+1} = 0$

$$3) -1 \leq (-1)^n \leq 1 \Rightarrow 6 \leq (-1)^n + 7 \leq 8 \text{ or } 4n^2 + 3 > 0$$

$$\text{alors } \frac{6}{4n^2} \leq \frac{(-1)^n + 7}{4n^2 + 3} \leq \frac{8}{4n^2 + 3} ; \frac{6}{4n^2 + 3} \leq U_n \leq \frac{8}{4n^2 + 3}$$

$$\text{Comme } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{6}{4n^2 + 3} = 0 \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{8}{4n^2 + 3} = 0 \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = 0$$

$$4) \text{ On a } -1 \leq \cos n \leq 1 \Rightarrow n - 1 \leq n + \cos n \leq n + 1$$

$$\text{et comme } \lim_{n \rightarrow +\infty} n - 1 = +\infty \text{ alors } \lim_{n \rightarrow +\infty} n + \cos n = \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = +\infty$$

5 a) $U_n = \frac{1+2^n}{3^n} = \frac{1}{3^n} + \frac{2^n}{3^n} = \left(\frac{1}{3}\right)^n + \left(\frac{2}{3}\right)^n$ or $\left(\frac{1}{3}\right)^n$ et $\left(\frac{2}{3}\right)^n$ sont 2 suites

géométrique de raison respectives $\frac{1}{3}$ et $\frac{2}{3}$ qui appartiennent à $] -1, 1[$ donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0 \text{ d'où } \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = 0 \text{ donc que } (U_n) \text{ converge vers } 0.$$

b) $U_n = (1 - \sqrt{2})^n$ est une suite géométrique de raison $q = 1 - \sqrt{2} \approx -0,4 \in] -1, 1[$

$$\text{Donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = 0 \text{ d'où } (U_n) \text{ converge vers } 0.$$

c) $\bullet (1,5)^n$ est une suite géométrique de raison $q = 1,5 \in]1, +\infty[$ de premier terme

$$1 \text{ Donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} (1,5)^n = +\infty$$

$\bullet$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 = +\infty$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = +\infty$ par suite (U_n) est divergente.



a) Pour chaque entier $n \geq 1$, puisqu'à chaque étape, on ajoute une portion colorée égale à la moitié de la moitié de celle ajoutée à l'étape précédente. On additionne n termes consécutifs qui forment une suite géométrique de raison $\frac{1}{4}$

$$\text{d'où } S_n = \frac{1}{2} \times \left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{4^{n-1}}\right) = \frac{1}{2} \frac{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{2}{3} \left(1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n\right)$$

b) $q = \frac{1}{4} \in] -1, 1[$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n = 0$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \frac{2}{3}$ d'où S_n converge vers $\frac{2}{3}$.



$$1) U_1 = -2 + 1^2 - 1 = -2, U_2 = U_1 + 4 - 2 = 0, U_3 = U_2 + 9 - 3 = 6$$

$$U_3 > 3$$

Montrons par récurrence que pour $n \geq 3$. Supposons que $U_n > 3$ pour

$$U_n \geq 3 \text{ et montrons que } U_{n+1} > n + 1$$

$$U_n > n \Rightarrow U_n + n^2 - n > n + n^2 - n \Rightarrow U_{n+1} > n^2$$

Or $n^2 > n + 1$ car $n^2 - n - 1 > 0$ puisque

	$\frac{1-\sqrt{5}}{2}$	$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$	3
$x^2 - x - 1$	+	-	+

Et comme $n > 3 \Rightarrow n^2 - n - 1 > 0$ par conséquent $U_{n+1} > n^2 > n + 1$

Conclusion $\forall n \geq 3, U_n \geq n$

2) Pour tout $n \geq 3$ on a $U_n \geq n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = +\infty$



La suite (V_n) est définie par $\begin{cases} V_0 = 1; V_1 = 3 \\ V_{n+2} = aV_{n+1} + (1-a)V_n \end{cases}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(W_n) est définie par: $W_n = V_{n+1} - V_n$.

$$\begin{aligned} 1) a) W_{n+1} &= V_{n+2} - V_{n+1} = aV_{n+1} + (1-a)V_n - V_{n+1} \\ &= (a-1)V_{n+1} + (1-a)V_n = (a-1)[V_{n+1} - V_n] = (a-1)W_n. \end{aligned}$$

Donc (W_n) est une suite géométrique de raison $q = a - 1$.

$$b) W_n = W_0 \cdot q^n; W_0 = V_1 - V_0 = 2 \text{ d'où } W_n = 2(a-1)^n.$$

$$c) \lim_{n \rightarrow +\infty} W_n = 0 \text{ si et seulement si } a-1 \in]-1, 1[;$$

$$-1 < a-1 < 1 \Leftrightarrow 0 < a < 2 \text{ d'où } E =]0, 2[.$$

2) a) Montrons par récurrence que : « pour tout $n \in \mathbb{N}; V_n = 7 - 6\left(\frac{2}{3}\right)^n$. »

$$* \text{ Pour } n=0; V_0 = 7 - 6\left(\frac{2}{3}\right)^0 = 1 \text{ donc la propriété est vraie pour } n=0.$$

$$* \text{ On suppose que : } V_n = 7 - 6\left(\frac{2}{3}\right)^n \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}, \text{ montrons que:}$$

$$V_{n+1} = 7 - 6\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}. \text{ On a: } W_n = V_{n+1} - V_n \Leftrightarrow V_{n+1} = W_n + V_n.$$

$$\text{et par suite: } V_{n+1} = 2\left(\frac{5}{3} - 1\right)^n + 7 - 6\left(\frac{2}{3}\right)^n = 2\left(\frac{2}{3}\right)^n + 7 - 6\left(\frac{2}{3}\right)^n$$

$$= 7 - 4\left(\frac{2}{3}\right)^n = 7 - 4 \times \frac{3}{2} \times \frac{2}{3} \times \left(\frac{2}{3}\right)^n = 7 - 4 \times \frac{3}{2} \times \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} \text{ d'où } V_{n+1} = 7 - 6\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}.$$

* Conclusion : Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $V_n = 7 - 6\left(\frac{2}{3}\right)^n$.

$$a) * S_n = \sum_{k=0}^{n-1} W_k = W_0 \left(\frac{1-q^n}{1-q} \right) = 2 \left(\frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n}{1 - \frac{2}{3}} \right) = 2 \left(\frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n}{\frac{1}{3}} \right) = 6 \left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n \right).$$

$$* \text{ On a } S_n = \sum_{k=0}^{n-1} W_k = \sum_{k=0}^{n-1} (V_{k+1} - V_k) = \sum_{k=0}^{n-1} V_{k+1} - \sum_{k=0}^{n-1} V_k$$

$$(V_1 + V_2 + \dots + V_{n-1} + V_n) - (V_0 + V_1 + V_2 + \dots + V_{n-1}) = V_n - V_0.$$

$$\text{d'où } S_n = V_n - 1 \quad (1); \text{ d'autre part } S_n = 6 \left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n \right) \quad (2).$$

$$\text{D'après (1) et (2), } V_n - 1 = 6 \left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n \right) \text{ d'où } V_n = 6 \left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n \right) + 1 = 7 - 6 \left(\frac{2}{3}\right)^n + 1;$$

$$\text{et par suite: } V_n = 7 - 6 \left(\frac{2}{3}\right)^n \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

$$c) \lim_{x \rightarrow +\infty} V_n = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[7 - 6 \left(\frac{2}{3}\right)^n \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} 7 - \lim_{x \rightarrow +\infty} 6 \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

$$= 7 - 6 \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 7 - 6 \times 0 = 7 \text{ car } \frac{2}{3} \in]-1, 1[.$$

$$d) S' = \sum_{k=0}^{n-1} V_k = \sum_{k=0}^{n-1} \left(7 - 6 \left(\frac{2}{3}\right)^k \right) = \sum_{k=0}^{n-1} 7 - \sum_{k=0}^{n-1} \left[6 \left(\frac{2}{3}\right)^k \right]$$

$$7n - 6 \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{2}{3}\right)^k = 7n - 6 \left[\frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n}{1 - \frac{2}{3}} \right] = 7n - 18 \left[1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n \right].$$



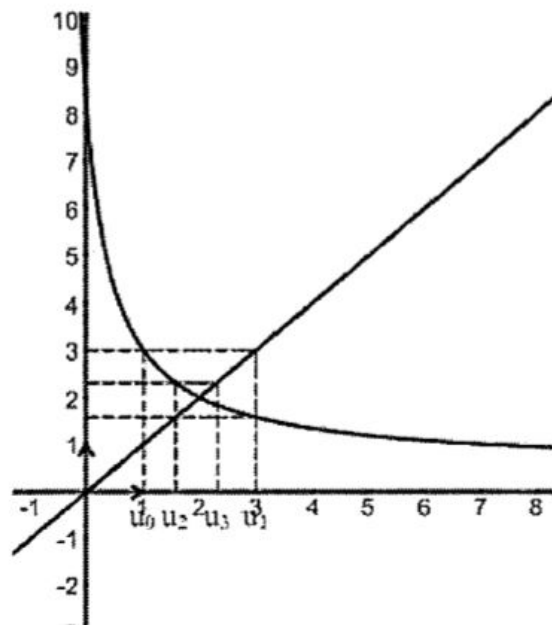
$$\frac{U_0 + 8}{2U_0 + 1} = \frac{9}{3} = 3 \text{ et } U_2 = \frac{11}{7} \text{ et } U_3 = \frac{67}{29}$$

2)

b) Le point M_0 de la ζ_f d'abscisse U_0 à pour ordonnée $f(U_0) = U_1$, la parallèle issue de M_0 à l'axe des abscisses coupe Δ en $M_1(U_1, U_1)$ et M_1 se projette donc sur l'axe des abscisses au point d'abscisse U_1 . On récurrence la même construction pour avoir U_2 et U_3 .

c) Le dessin montre que la suite (U_n) semble s'approcher de plus en plus vers l'abscisse du point d'intersection de ζ_f et Δ .

Donc (U_n) semble tendre vers 2.



3) a) $V_0 = \frac{U_0 - 2}{U_0 + 2} = -\frac{1}{3}$ et $v_1 = \frac{1}{5}$ et $V_2 = -\frac{3}{25}$

$$\begin{aligned} \text{b) } V_{n+1} &= \frac{U_{n+1} - 2}{U_{n+1} + 2} = \frac{\frac{U_n + 8}{2U_n + 1} - 2}{\frac{U_n + 8}{2U_n + 1} + 2} = \frac{(U_n + 8) - 2(2U_n + 1)}{(U_n + 8) + 2(2U_n + 1)} = \frac{-3U_n + 6}{5U_n + 10} \\ &= \frac{-3(U_n - 2)}{5(U_n + 2)} = -\frac{3}{5} V_n \end{aligned}$$

$\Rightarrow (V_n)$ est une suite géométrique de raison $q = -\frac{3}{5}$ et de 1^{er} terme $V_0 = -\frac{1}{3}$.

c) $V_n = q^n \cdot V_0$

d'où $V_n = \left(-\frac{3}{5}\right)^n \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{3} \left(-\frac{3}{5}\right)^n$ puisque $q = -\frac{3}{5} \in]-1, 1[$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = 0$

4) $V_n = \frac{U_n - 2}{U_n + 2} \Leftrightarrow V_n \cdot (U_n + 2) = U_n - 2$

$$U_n(V_n - 1) = -2V_n - 2 \quad \text{Si } V_n \neq 1 \text{ alors } U_n = \frac{2V_n + 2}{1 - V_n} = \frac{-\frac{2}{3} \left(-\frac{3}{5}\right)^n + 2}{1 + \frac{1}{3} \left(-\frac{3}{5}\right)^n}$$

d'où $U_n = \frac{-2 \left(-\frac{3}{5}\right)^n + 6}{3 + \left(-\frac{3}{5}\right)^n}$

Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} V_n = 0$ alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} U_n = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2V_n + 2}{1 - V_n} = 2$

On retrouve alors le résultat espéré à la question 2/ c



1) Vérification pour $n = 0$: $V_0 = 2 > 0$ et $U_0 = 1 > 0$

donc la propriété est vraie par $n = 0$ Supposons que $U_n > 0$ et $V_n > 0$

Montrer que $U_{n+1} > 0$ et $V_{n+1} > 0$

on a : $U_{n+1} = \frac{2U_n \cdot V_n}{U_n + V_n}$ comme $U_n > 0$ et $V_n > 0$ alors $U_n V_n > 0$ et $U_n + V_n > 0$

d'où $U_{n+1} > 0$ et $V_{n+1} = \frac{1}{2}(U_n + V_n) > 0$

ainsi d'après le principe de récurrence on a $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_n > 0$ et $V_n > 0$

2) a) $W_{n+1} = V_{n+1} - U_{n+1}$

$$= \frac{1}{2}(U_n + V_n) - \frac{2U_n V_n}{U_n + V_n} = \frac{(U_n + V_n)^2 - 4U_n V_n}{2(U_n + V_n)} = \frac{(U_n - V_n)^2}{2(U_n + V_n)} = \frac{W_n^2}{2(U_n + V_n)}$$

b) on a : $w_0 = V_0 - U_0 = 1 \geq 0$

Supposons que $W_n \geq 0$. Montrons que $W_{n+1} \geq 0$

$$W_{n+1} = \frac{W_n^2}{2(U_n + V_n)} \text{ comme } W_n^2 \geq 0 \text{ et } U_n \geq 0 \text{ et } V_n \geq 0 \text{ alors } W_{n+1} \geq 0.$$

d'où d'après le principe de récurrence $\forall n \in \mathbb{N}$, $W_n \geq 0$

$$c) W_{n+1} = \frac{W_n^2}{2(U_n + V_n)} = \frac{W_n}{2} \times \frac{W_n}{U_n + V_n}$$

Comme $U_n \geq 0 \geq -U_n$ alors $V_n + U_n \geq V_n - U_n$ or $U_n + V_n > 0$

$$\text{Soit } \frac{V_n - U_n}{U_n + V_n} \leq 1 \text{ où encore } \frac{W_n}{U_n + V_n} \leq 1 \text{ ainsi } \frac{W_n}{2} \cdot \frac{W_n}{U_n + V_n} \leq \frac{W_n}{2} \text{ Soit } W_{n+1} \leq \frac{1}{2} W_n \quad d)$$

on a : $W_0 = 1 \leq \left(\frac{1}{2}\right)^0$ Supposons que $W_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$ et Montrons que $W_{n+1} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$

$$\text{on a : } W_{n+1} \leq \frac{1}{2} W_n \quad \text{et } W_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n \text{ donc } W_{n+1} \leq \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

d'après le principe de récurrence on a $\forall n \in \mathbb{N}$, $W_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$

2) On a $W_n \geq 0$ et $W_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$ alors $0 \leq W_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$

Comme $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ car $\frac{1}{2} \in]-1, 1[$ donc $\lim_{n \rightarrow \infty} W_n = 0$ or $W_n = V_n - U_n$

donc $\lim_{n \rightarrow \infty} V_n - U_n = 0$ d'où $\lim_{n \rightarrow \infty} U_n = \lim_{n \rightarrow \infty} V_n$

$$3) a) U_{n+1} - U_n = \frac{2U_n V_n}{U_n + V_n} - U_n = \frac{2U_n V_n - U_n^2 - U_n V_n}{U_n + V_n}$$

$$= \frac{U_n V_n - U_n^2}{U_n + V_n} = \frac{U_n (V_n - U_n)}{U_n + V_n} = \frac{U_n W_n}{U_n + V_n}$$

or $W_n \geq 0$, $U_n > 0$ et $V_n > 0$ donc $U_{n+1} - U_n \geq 0 \Rightarrow U_{n+1} \geq U_n$

$$b) V_{n+1} - V_n = \frac{1}{2}(U_n + V_n) - V_n = -\frac{V_n - U_n}{2} = -\frac{W_n}{2} \leq 0 \quad \text{car } W_n \geq 0 \text{ d'où } V_{n+1} - V_n \leq 0$$

c) on a $U_0 \cdot V_0 = 2$

Supposons que $U_n \cdot V_n = 2$ et Montrons que $U_{n+1} \cdot V_{n+1} = 2$

$$U_{n+1} \cdot V_{n+1} = \frac{2U_n V_n}{U_n + V_n} \times \frac{1}{2}(U_n + V_n) = U_n V_n = 2$$

donc d'après le principe de récurrence $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_n V_n = 2$ est une constante.

$$d) \lim_{n \rightarrow \infty} U_n = \lim_{n \rightarrow \infty} V_n = \ell \text{ et } U_n V_n = 2 \text{ alors } \lim_{n \rightarrow \infty} U_n V_n = 2$$

Soit $\ell^2 = 2 \Leftrightarrow \ell = \sqrt{2}$ or $\ell = -\sqrt{2}$ or $U_n > 0 \Rightarrow \ell > 0$ d'où $\ell = \sqrt{2}$

$$e) U_0 = \frac{2U_0 V_0}{U_0 V_0} = \frac{4}{3} \text{ et } V_1 = \frac{1}{2}(U_0 + V_0) = \frac{3}{2}$$

$$U_2 = \frac{2U_1 V_1}{U_1 + V_1} = \frac{24}{17} \text{ et } V_2 = \frac{1}{2}(U_1 + V_1) = \frac{17}{12}$$

$$U_3 = \frac{816}{577} \text{ et } V_3 = \frac{577}{408} ; U_4 = \frac{941664}{665857} \text{ et } V_4 = \frac{665857}{470832}$$

$U_n < \sqrt{2} = \ell < V_n$ car U_n est croissante et V_n est décroissante ;

$$U_4 \approx 1,414231562371$$

$$V_4 \approx 1,414213562374 \quad \text{or } U_4 < \sqrt{2} < V_4$$

$$\text{d'où } 1,414231562371 < \sqrt{2} < 1,414213562374$$

11

$$1) U_{n+1} - 3 = \frac{3U_n + 9 - 6U_n}{2U_n} = \frac{-3U_n + 9}{2U_n}$$

$$U_{n+1} - 3 = \frac{-3}{2U_n}(U_n - 3)$$

❖ Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n > 0$.

◆ Pour $n = 0$, $U_0 = 1 > 0$

◆ Supposons que $U_n > 0$, montrons que $U_{n+1} > 0$

$$U_{n+1} = \frac{3U_n + 9}{2U_n} > 0 \text{ car } U_n > 0$$

◆ Conclusion: Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n > 0$

$$\text{donc } \frac{-3}{2U_n} < 0 \text{ et comme on a : } U_{n+1} - 3 = \frac{-3}{2U_n}(U_n - 3)$$

donc $U_{n+1} - 3$ et $U_n - 3$ sont de signe contraire.

❖ Montrons par récurrence que pour tout $p \in \mathbb{N}$ on a : $U_{2p} \leq 3 \leq U_{2p+1}$.

◆ Pour $p = 0$; $U_0 = 1$ et $U_1 = 6$ donc on a : $U_0 \leq 3 \leq U_1$

◆ Soit $p \in \mathbb{N}$, supposons que $U_{2p} \leq 3 \leq U_{2p+1}$ et montrons que $U_{2p+2} \leq 3 \leq U_{2p+3}$.

On a : $U_{n+1} - 3$ et $U_n - 3$ sont de signes contraires donc pour $n = 2p + 1$ on a : $U_{2p+2} - 3$ et $U_{2p+1} - 3$ sont de signe contraire

Or $U_{2p+1} - 3 \geq 0$ d'après l'hypothèse de récurrence donc

$$U_{2p+2} - 3 \leq 0 \text{ et par suite } U_{2p+2} \leq 3.$$

De même pour $n = 2p + 2$ on a $U_{2p+3} - 3$ et $U_{2p+2} - 3$ sont de signe contraire or $U_{2p+2} - 3 \leq 0$ donc $U_{2p+3} - 3 \geq 0$.

C'est-à-dire $3 \leq U_{2p+3}$ d'où $U_{2p+2} \leq 3 \leq U_{2p+3}$.

◆ Conclusion : pour tout $p \in \mathbb{N}$ on a : $U_{2p} \leq 3 \leq U_{2p+1}$.

2) Si (U_n) converge vers ℓ alors (U_{2p}) converge vers ℓ et (U_{2p+1}) converge vers ℓ on a : $U_{2p} \leq 3 \leq U_{2p+1}$

d'où $\ell \leq 3 \leq \ell$ donc $\ell = 3$

3) On a $U_{2p} \leq 3 \leq U_{2p+1}$

❖ Si n est impair, $U_n = U_{2p+1} \geq 3 > 2$ donc $U_{2p+1} \geq 2$

❖ Si n est pair, $U_n = U_{2p}$, montrons par récurrence que $U_{2p} \geq 2$ pour tout $p \in \mathbb{N}^*$.

❖ Pour $p=1$, $U_2 = \frac{3U_1 + 9}{2U_1}$ or $U_1 = \frac{3U_0 + 9}{2U_0} = 6$ donc $U_2 = \frac{9}{4} > 2$ vrai

❖ Supposons que $U_{2p} \geq 2$, montrons que $U_{2p+2} \geq 2$

$$\begin{aligned} U_{2p+2} - 2 &= \frac{3U_{2p+1} + 9}{2U_{2p+1}} - 2 = \frac{3U_{2p+1} + 9 - 4U_{2p+1}}{2U_{2p+1}} = \frac{-U_{2p+1} + 9}{2U_{2p+1}} \\ &= \frac{-\frac{3U_{2p} + 9}{2U_{2p}} + 9}{2 \cdot \frac{3U_{2p} + 9}{2U_{2p}}} = \frac{-\frac{3U_{2p} + 9 - 18U_{2p}}{2U_{2p}}}{\frac{6U_{2p} + 18}{2U_{2p}}} = \frac{15U_{2p} - 9}{6U_{2p} + 18} \end{aligned}$$

On a : $U_{2p} \geq 2 \Leftrightarrow 15U_{2p} \geq 30 \Leftrightarrow 15U_{2p} - 9 \geq 21 > 0$

de même $U_{2p} \geq 2 \Leftrightarrow 6U_{2p} \geq 12 \Leftrightarrow 6U_{2p} + 18 \geq 30 > 0$

donc $U_{2p+2} - 2 \geq 0$ et par suite $U_{2p+2} \geq 2$

❖ *Conclusion* : Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $U_{2p} \geq 2$.

On a : $U_{2p+1} \geq 2$ et $U_{2p} \geq 2$ pour tout $p \in \mathbb{N}^*$

donc $U_n \geq 2$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

4) Montrons que pour tout $n \geq 2$ on a : $|U_n - 3| \leq \left(\frac{3}{4}\right)^{n-2}$

❖ pour $n = 2$, $|U_2 - 3| = \left| \frac{9}{4} - 3 \right| = \frac{3}{4}$ donc $|U_2 - 3| \leq \left(\frac{3}{4} \right)^0 = 1$ vrai

On suppose que $|U_n - 3| \leq \left(\frac{3}{4} \right)^{n-2}$ et montrons que $|U_{n+1} - 3| \leq \left(\frac{3}{4} \right)^{n-1}$.

$$|U_{n+1} - 3| = \left| \frac{3U_n + 9}{2U_n} - 3 \right| = \left| \frac{-3U_n + 9}{2U_n} \right| = \left| \frac{-3}{2U_n} (U_n - 3) \right| = \frac{3}{2U_n} |U_n - 3|.$$

On a: $U_n \geq 2 \Leftrightarrow 2U_n \geq 4 \Leftrightarrow \frac{1}{2U_n} \leq \frac{1}{4} \Leftrightarrow \frac{3}{2U_n} \leq \frac{3}{4}$

d'où $|U_{n+1} - 3| = \frac{3}{2U_n} |U_n - 3| \leq \frac{3}{4} \times |U_n - 3| \leq \frac{3}{4} \left(\frac{3}{4} \right)^{n-2} = \left(\frac{3}{4} \right)^{n-1}$

et par suite $|U_{n+1} - 3| \leq \left(\frac{3}{4} \right)^{n-1}$. *Conclusion* $|U_n - 3| \leq \left(\frac{3}{4} \right)^{n-2}$ pour tout $n \geq 2$.

5) On a $|U_n - 3| \leq \left(\frac{3}{4} \right)^{-2} \left(\frac{3}{4} \right)^n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{3}{4} \right)^n = 0$

donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} (U_n - 3) = 0$ et par suite $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = 3$

12

a) ζ_f et ζ_g se rapproche indéfiniment lorsque on prend des grands valeurs donc la conjonction est que $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = 0$

b) On a $A_n \in \zeta_f \Rightarrow A_n(n, f(n))$ et $B_n \in \zeta_f \Rightarrow B_n(n, g(n))$

donc $U_n = A_n B_n = \sqrt{(f(x) - g(x))^2} = |f(n) - g(n)|$ Comme ζ_g est au dessous du ζ_f

Donc $U_n = g(n) - f(n) = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$

$$= \frac{(\sqrt{n+1} - \sqrt{n})(\sqrt{n+1} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{n+1-n}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$$

c) On sait que $n+1 > n \Leftrightarrow \sqrt{n+1} > \sqrt{n}$ donc $\sqrt{n+1} + \sqrt{n} > \sqrt{n} + \sqrt{n}$

Soit $\sqrt{n+1} + \sqrt{n} > 2\sqrt{n}$ Par suite $0 < \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} < \frac{1}{2\sqrt{n}}$

13

1) a) * f est une fonction polynôme donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$f'(x) = 1 + 2x + 3x^2 + \dots + nx^{n-1}$$

* g est une fonction rationnelle donc dérivable sur $\mathbb{R} - \{1\}$

$$\text{et } g'(x) = \frac{-(n+1)x^n \cdot (1-x) + (1-x^{n+1})}{(1-x)^2} \text{ d'où } g'(x) = \frac{nx^{n+1} - (n+1)x^{n+1}}{(1-x)^2}$$

b) $f(x) = 1 + x + \dots + x^n$ c'est la sommation des termes consécutifs d'une suite géométrique de raison $q = x$ pour $x \neq 1$, $f(x) = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}$

Donc $\forall x \neq 1, f(x) = g(x)$ par suite $f'(x) = g'(x)$

Donc pour tout $a \neq 1$, $f'(a) = g'(a)$

$$\text{Soit } 1 + 2a + 3a^2 + \dots + na^{n-1} = \frac{na^{n+1} - (n+1)a^{n+1}}{(1-a)^2} - 1$$

$$2) a) A_n \text{ l'aire total de la figure } = 1 + 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 3 \times \left(\frac{1}{2^2}\right)^2 + \dots + n \times \left(\frac{1}{2^{n-1}}\right)^2$$

$$= 1 + 2 \times \frac{1}{4} + 3 \times \frac{1}{4^2} + \dots + n \times \frac{1}{4^{n-1}} = 1 + 2 \times \frac{1}{4} + 3 \times \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \dots + n \times \left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$$

On remarque que $A_n = f'\left(\frac{1}{4}\right)$ Comme $f'\left(\frac{1}{4}\right) = g'\left(\frac{1}{4}\right)$

$$\text{Alors } A_n = \frac{b \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1} - (b+1) \left(\frac{1}{4}\right)^n + 1}{\left(\frac{1}{4} - 1\right)^2} \quad A_n = \frac{16}{9} \left[\left(\frac{1}{4}\right)^n \left(\frac{n}{4} - n - 1\right) + 1 \right]$$

$$A_n = \frac{16}{9} \left[-\frac{3}{4} \cdot \frac{n}{4^n} - \frac{1}{4^n} + 1 \right] \text{ d'où } A_n = -\frac{4}{3} \cdot \frac{n}{4^n} - \frac{16}{9} \cdot \frac{1}{4^n} + \frac{16}{9}$$

b) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{4n} = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n = 0$ car $\left(\frac{1}{4}\right)^n$ est une suite géométrique de

raison $\frac{1}{4} \in]-1, 1[$ Par suite $\lim_{n \rightarrow +\infty} A_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} -\frac{4}{3} \cdot \frac{n}{4^n} - \frac{16}{9} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^n + \frac{16}{9} = \frac{16}{9}$



1) $p_0 = 1000$ et puisque 20% disparaissent des animaux chaque années il on reste 80%.

Et comme n et $n+1$ sont deux années successives et puisqu'on introduit 120 animaux supplémentaires alors $P_{n+1} = 0,8 P_n + 120$

2) on trace la droite $y = x$ et la droite $y = 0,8x + 120$

Le graphique nous persuade que la suite (P_n) semble converger vers

l'abscisse du point d'intersection des deux droites ($y = x$ et $y = 0,8x + 120$)

$$x = 0,8x + 120 \Leftrightarrow x = 600 \text{ alors la suite}$$

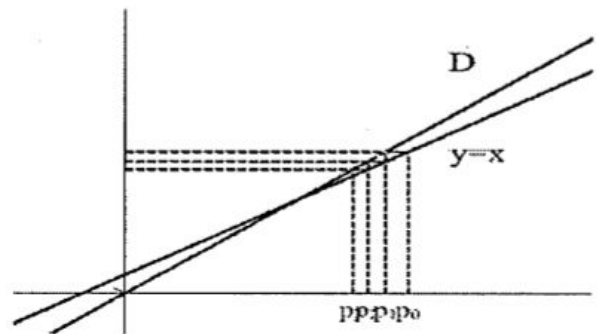
(P_n) semble converger vers 600.

3) a) $V_n = P_n - 600$ Alors $V_{n+1} = P_{n+1} - 600 = 0,8P_n + 120 - 600 = 0,8P_n - 480 = 0,8(P_n - 600) = 0,8V_n$
Par suite (V_n) est une suite géométrique de raison $(0,8)$.

b) $\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = 0$ car (V_n) est une suite géométrique de raison $q = 0,8 \in]-1, 1[$

$$* \lim_{n \rightarrow +\infty} P_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} V_n + 600 = 600 \text{ car } \lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = 0 \text{ et } V_n = P_n - 600$$

4) l'effectif de la population se stabilise sur la valeur 600 cette stabilisation est relativement rapide puisque $u_{10} = 643$ et $u_{20} = 605$ et $u_{30} = 600$



15

1) a) le 3 janvier 2000, la somme disponible correspond à la somme versée le 1^{er} janvier 1999 augmentée de ses intérêts et à la somme versée le

$$1^{\text{er}} \text{ janvier 2000 soit } 600 \text{ D} \times \left(1 + \frac{3}{100}\right) + 600 \text{ D}$$

La somme disponible le 3 janvier 2000 est 1218 dinars

b) Le 3 janvier 2001 la somme disponible correspond à la somme disponible augmentée le 3 janvier 2000 augmentée de ses intérêts pour l'année 2000 et à la somme versée le 1^{er} janvier 2001 soit $1218 \text{ D} \times 1,03 + 600 \text{ D}$

La somme disponible le 3 janvier 2001 est 1854,54 dinars.

2) La somme u_{n+1} disponible le 3 janvier de l'année 1999 + n + 1 correspond à la somme disponible le 3 janvier de l'année 1999 + n augmenté de ses intérêts pour cette année et de la somme versée le 1^{er} janvier de l'année 1999 + n + 1.

$$\text{On a bien } u_{n+1} = 1,03u_n + 600.$$

3) a) Pour tout entier naturel n, on a :

$$v_{n+1} = u_{n+1} + 20\,000 = 1,03u_n + 600 + 20\,000 = 1,03u_n + 20\,600 = 1,03(u_n + 20\,000).$$

On a $v_{n+1} = 1,03 v_n$ donc la suite (v_n) est géométrique de raison 1,03.

Son premier terme est $v_0 = u_0 + 20\,000 = 20\,600$.

$$\text{b) On a } v_n = v_0 \times 1,03^n = 20\,600 \times 1,03^n$$

$$\text{et } u_n = v_n - 20\,000 = 20\,600 \times 1,03^n - 20\,000$$

4) La somme dont Ali aurait pu disposer le 3 janvier 2029 est u_{30} soit environ 30001,61 dinars.