

Exercice 1

Une seule des réponses est exacte. Trouver cette réponse

- 1) $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont trois vecteurs du plan non nuls, l'expression $(\vec{u} \cdot \vec{v}) \cdot \vec{w}$ désigne :
 a) un nombre réel b) un vecteur colinéaire à $\vec{w}$ c) n'a pas de sens
- 2) $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont trois vecteurs du plan non nuls tel que : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{w}$ alors on a nécessairement :
 a) $\vec{v} = \vec{w}$ b) $\vec{u} \perp \vec{v}$ et $\vec{u} \perp \vec{w}$ c) $\vec{u} \perp (\vec{v} - \vec{w})$
- 3) $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan non nuls tel que $|\vec{u} \cdot \vec{v}| = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\|$ alors :
 a) $\vec{u} \perp \vec{v}$ b) $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires c) $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas collinaires

Exercice 2

Soit OAB un triangle équilatéral de centre de gravité G et de côté $AB = 9$, on désigne par H le projeté orthogonal de O sur (AB)

- 1) a) Calculer OH
 b) Calculer $\vec{OA} \cdot \vec{OB}$ et $\vec{OA} \cdot \vec{OH}$
- 2) Calculer $\vec{GH} \cdot \vec{GA}$, $\vec{GH} \cdot \vec{GB}$ et $\vec{GA} \cdot \vec{GB}$
- 3) Montrer que $\vec{GO}^2 + \vec{GO} \cdot \vec{GA} + \vec{GO} \cdot \vec{GB} = 0$

Exercice 3

Soit ABC un triangle et I le milieu de $[BC]$ avec $IB = IC = 2$; $IA = 3$ et $\widehat{AIB} = \frac{\pi}{3}$

- 1) a) Montrer que $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = AI^2 - IB^2$
 b) En déduire $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$
- 2) a) Calculer $AB^2 + AC^2$ et $AB^2 - AC^2$
 b) En déduire AB et AC
 c) Donner la valeur exacte de $\cos(\widehat{BAC})$
- 3) Soit H le projeté orthogonal de A sur (BC)
 a) Montrer que : $AB^2 - AC^2 = 2\vec{BC} \cdot \vec{IH}$
 b) En déduire IH

Exercice 4

Soit $ABCD$ un carré tel que $AB = 3$. On désigne par E le symétrique de C par rapport à B et par J le point du segment $[DC]$ tel que $CJ = 1$ et par K le point du segment $[BE]$ tel que $K = CJ$.

- 1) Montrer que $\vec{AD} \cdot \vec{AK} = -6$ et $\vec{JD} \cdot \vec{AK} = -6$ puis déduire que $(AJ) \perp (AK)$.
- 2) a) Calculer KD et KJ .
 b) Calculer $\cos(\widehat{DKJ})$ puis déduire que $\vec{KJ} \cdot \vec{KD} = 28$.
- 3) a) Soit I le milieu de $[JK]$. Montrer que : $DI = \frac{5\sqrt{2}}{2}$

b) Soit $\mathcal{C} = \{M \in P / \overrightarrow{MJ} \cdot \overrightarrow{MK} = 6\}$. Montrer que $\mathcal{C}$ est le cercle de centre I et de rayon DI

4) a) Vérifier que D est le barycentre des points pondérés $(J, 3)$ et $(C, -2)$.

b) Soit $f(M) = 3MJ^2 - 2MC^2$ et $g(M) = f(M) - MC^2$ et $H = D * C$.

Montrer que $f(M) = MD^2 - 6$ et $g(M) = 2\overrightarrow{MH} \cdot \overrightarrow{CD} - 6$.

c) Déterminer les ensembles suivants :

$\mathcal{C}' = \{M \in P / f(M) = 3\}$ et $\Delta = \{M \in P / g(M) = -6\}$

Exercice 5

Dans un plan muni d'un repère orthonormé on considère les points :

$A(-1, 1)$, $B(-2, 3)$ et $C(\frac{5}{2}, 4)$

1) a) Calculer AB et AC

b) Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ et donner la valeur de : $\cos(\widehat{BAC})$

2) a) Soit G le barycentre des points pondérés $(A, 1)$ et $(B, 2)$, calculer GA et G

b) Montrer que : $\forall M \in P$ on a : $MA^2 + 2MB^2 = 3MG^2 + GA^2 + 2GB^2$

c) En déduire l'ensemble (E) des points M du plan tel que : $MA^2 + 2MB^2 = \frac{22}{3}$

Exercice 6

Soit ABC est un triangle équilatéral de côté 2 et ACD un triangle isocèle rectangle en A .

(voir figure)

1) Montrer que $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB} = -2\sqrt{3}$

b) Montrer que $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB}$

c) Montrer alors que $\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{CB} = 2(1 - \sqrt{3})$

d) En déduire que $CE = \sqrt{3} - 1$

e) Montrer que $DE = \sqrt{3} + 1$

2) Soit O le milieu de $[BC]$ et F le point de $[OA]$ tel que $OF = 1$

a) Déterminer les coordonnées des points A , B , E et D dans le repère $(O, \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OF})$

b) Montrer alors que $\overrightarrow{AE} \perp \overrightarrow{BD}$

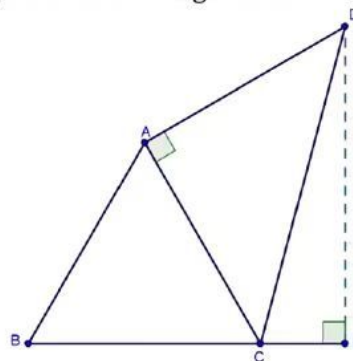
3) Soient $\Delta = \{M \in P / MC^2 - MB^2 = -4\sqrt{3}\}$ et $\Gamma = \{M \in P / MC^2 + MB^2 = 8\}$

a) Montrer que $M \in \Delta$ équivaut à $2\overrightarrow{MO} \cdot \overrightarrow{BC} = -4\sqrt{3}$

b) Vérifier que $E \in \Delta$

c) Montrer $\Delta = (DE)$

d) Montrer Γ que est le cercle de centre O et de rayon $\sqrt{3}$.



Exercice 7

Dans un plan muni d'un repère orthonormé on considère les points :

$A(2, 2)$; $B(1, 1)$ et $C(4, 0)$

1) Montrer que le triangle ABC est rectangle en A

2) Calculer les distances AB , AC et BC

- 3) Calculer $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}$ et en déduire la valeur de $\cos(\widehat{ACB})$
- 4) On désigne par H le projeté orthogonal du point A sur la droite (BC) et par $I = A * B$
 - a) Calculer les distances IH et AH
 - b) Déterminer les coordonnées du point H

Exercice 8

Dans un plan muni d'un repère orthonormé on considère les points :

$A(4, 0)$; $B(2, 2\sqrt{3})$ et $C(0, -4)$

- 1) a) Vérifier que $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = 8\sqrt{3}(1 + \sqrt{3})$
 - b) Vérifier que $CA = 4\sqrt{2}$ et $CB = 4\sqrt{2 + \sqrt{3}}$
 - c) Montrer que $\cos(\widehat{ACB}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et en déduire la valeur de $\widehat{ACB}$
- 2) a) Calculer $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB}$
 - b) En déduire la nature du triangle ADB
- 3) a) Trouver une équation cartésienne de l'ensemble $E = \{M \in P / \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{AC} = 12\}$
déterminer alors E
 - b) Trouver une équation cartésienne de l'ensemble $F = \{M \in P / MA^2 + MC^2 = 20\}$
déterminer alors E

Exercice 9

Soit $AICJ$ est un rectangle tel que $AC = 4\sqrt{3}$ et B un point de $[IA]$ tel que $AB = BC = 4$

Montrer que $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = -8$

- 2) En déduire que $\cos \widehat{BAC} = -\frac{1}{2}$ et que $BI = 2$
- 3) Montrer que $\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CI} = 12$ et $\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CJ} = 12$.
- 4) En déduire que $(CB) \perp (IJ)$
- 5) Soient $\Delta = \{M \in P / MA^2 - MB^2 = 32\}$ et $\Gamma = \{M \in P / MA^2 + MB^2 = 64\}$.
 - a) Montrer que $M \in \Delta$ signifie que $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{AB} = 16$ avec $O = A * B$.
 - b) Montrer que $C \in \Delta$ puis déterminer Δ .
 - c) Montrer que Γ est le cercle de centre O passant par C .

Exercice 10

Soit $ABCD$ est un carré de côté 3.

On désigne par E et F les points tels que $\overrightarrow{AE} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CF} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{CB}$

- 1) a) Montrer que $\overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{DF} = -6$ et $\overrightarrow{EA} \cdot \overrightarrow{DF} = -6$
 - b) En déduire que les droites (DE) et (DF) sont perpendiculaires.
- 2) a) Montrer que $\overrightarrow{FE} \cdot \overrightarrow{FA} = 28$
 - b) Calculer les distance FE et FA . En déduire $\cos \widehat{EFA}$.
- 3) On désigne par I le milieu de $[EF]$.

Soit $\Gamma = \{M \in \mathcal{P} / \overrightarrow{ME} \cdot \overrightarrow{MF} = 6\}$

- a) Montrer que Γ est le cercle de centre I et de rayon $\frac{5\sqrt{2}}{2}$
- b) Montrer que $A \in \Gamma$. Construire alors Γ .
- c) La droite (AF) recoupe Γ en H, soit A' le point diamétralement opposé à A sur le cercle Γ .

Montrer que $\overrightarrow{FA} \cdot \overrightarrow{FH} = -6$

4) Soit $\mathcal{E}_k = \{M \in \mathcal{P} / 5MC^2 - 2MB^2 = k\}$, où k est un paramètre réel.

- a) Vérifier que F est le barycentre des points pondérés (C, 5) et (B, -2)
- b) Discuter selon k la nature de l'ensemble $\mathcal{E}_k$.

5) Soit N un point de (AD) et N' le point de (DC) vérifiant $\overrightarrow{EN} \cdot \overrightarrow{EN'} = -DE^2$

On pose $J = N * N'$

- a) Montrer que $\overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{DJ} = DE^2$.
- b) En déduire que lorsque N varie sur (AD), J varie sur une droite Δ que l'on précisera.
- c) Pour quelle valeur de Δ est elle tangente à $\mathcal{E}_k$?

Exercice 05 : Soit $ABCDEFGH$ un cube dans l'espace (E) rapporté au repère $(A, \vec{AB}, \vec{AD}, \vec{AE})$. on note le milieu I de $[EF]$ et K le centre de gravité du carré $ADHE$.

- ① a. Montrer que : $\vec{BK} = \vec{IG} \wedge \vec{IA}$
b. En déduire l'aire du triangle IGA
- ② Calculer le volume du tétraèdre $ABIG$
- ③ En déduire la distance du point B au plan (AIG)

Exercice 06

On considère les plans suivants

$$(S) \quad 2x + y - z + 1 = 0$$

$$(P) \quad x - 2y + 3 = 0.$$

- ① Déterminer $\vec{n}$ et $\vec{n}'$ vecteurs normaux respectivement aux plans (S) et (P)
- ② Montrer que les plans (S) et (P) sont sécants suivant une droite (Δ) .
- ③ a) Calculer le vecteur $\vec{D} = \vec{n} \wedge \vec{n}'$ puis en déduire un vecteur directeur de la droite (Δ)
b) Vérifier que le point $A(-1, 1, 0)$ appartient à (Δ)
c) Déterminer une représentation paramétrique de la droite (Δ)

④ Soit (S) la sphère définie par l'équation : $x^2 + y^2 + z^2 - 3y - 5z + 1 = 0$

- ⑤ Déterminer les points d'intersection de la droite (Δ) et la sphère (S)
- ⑥ En déduire l'intersection de la sphère (S) et le plan (P)

④

Produit scalaire / Produit vectoriel dans l'espace

Exercice 01 (N 2024)

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les points $A(-2, 0, -1)$ et $B(2, 2, 1)$, le plan passant par A et de vecteur normal $\vec{n}(2, -2, 1)$ et la sphère (S) de centre $\Omega(2, -1, 0)$ et de rayon $R=5$

- ① Montrer que $2x - 2y + z + 3 = 0$ est une équation du plan (P)
- ② Déterminer une équation cartésienne de la sphère (S)
- ③ a) Vérifier que la distance $d(\Omega, (P)) = 3$
b) En déduire que le plan (P) coupe la sphère suivant un cercle (Γ) de rayon à déterminer.
- ④ a) Déterminer une représentation paramétrique de la droite (Δ) passant par Ω et perpendiculaire au plan (P)
b) Montrer que le point $H(0, 1, -1)$ est le centre du cercle (Γ)
c) Montrer que la droite (Δ) est la médiatrice du segment $[AB]$

①

Exercice 02 (R 2023)

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ on considère les points $A(2, 1, 1)$

$B(-2, 0, 5)$; $C(4, -5, 7)$ et

$\Omega(1, -1, 0)$. on pose $\vec{u} = \vec{\Omega A}$

1) a/ Montrer que $\vec{AB} \wedge \vec{AC} = 13\vec{u}$ et déduire que les points A, B et C ne sont pas alignés.

b/ Vérifier que $x + 2y + 2z - 8 = 0$ est une équation cartésienne du plan (ABC)

c/ Montrer que le plan (ABC) est tangent à la sphère (S) au point A.

2) Soient (P) le plan d'équation cartésienne $3x + 4y + z + 1 = 0$ et (Δ) la droite passant par A et orthogonal au plan (P)

a/ Montrer que la droite (Δ) coupe le plan (P) au point $H(\frac{1}{2}, -1, \frac{3}{2})$

b/ Déterminer les coordonnées du point D tel que H soit le milieu du segment [AD]

3) Soit (Q) le plan passant par D et de vecteur normal $\vec{AD}$

a/ Montrer que (Q) est tangent à (S) en D

b/ Montrer que (Q) et (ABC) se coupent suivant la

②

droite (BC)

Exercice 03 : on considère la sphère définie par : $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y - 2z = 0$ et le plan (P) défini par : $2x + y - 2z = 0$

① vérifier que le point $\Omega(-1, 2, 1)$ est le centre de la sphère (S) et son rayon $r = \frac{5}{2}$

② Montrer que (P) coupe la sphère (S) selon un cercle (C) dont on déterminera son centre et son rayon.

Exercice 04

on considère dans l'espace les deux points $A(-1, 2, 1)$ et $B(3, -2, 4)$

Soit (S) l'ensemble des points $M(x, y, z)$ de l'espace tel que :

$$\vec{AM} \cdot \vec{BM} = 0$$

① Prouver que (S) est une sphère dont déterminera le centre et le rayon R :

② Donner une équation du plan (P) tangent à la sphère (S) en A

③ soit $C(0, 0, 3)$ un point dans l'espace.

a/ Vérifier que $C \in (S)$.

b/ Déterminer le triplet de coordonnées du vecteur $\vec{AB} \wedge \vec{AC}$.

c/ En déduire la distance $d(C, (AB))$

③