

Equations de droites et de plans

Equation d'une sphère

■ Equations paramétriques et équations cartésiennes d'une droite:

* Une droite est déterminée par la donnée de deux points ou un point et un vecteur directeur.

* Soit $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère, $\vec{u} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ et $A(x_0, y_0, z_0)$

$$M(x, y, z) \in \Delta(A, \vec{u}) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = \alpha \vec{u}$$

$$\Delta: \begin{cases} x = \alpha a + x_0 \\ y = \alpha b + y_0 \\ z = \alpha c + z_0 \end{cases} ; \alpha \in \mathbb{R} ; \text{c'est une représentation paramétrique de la droite } \Delta,$$

ou encore les équations paramétriques de Δ .

* Remarques:

Si on a une représentation paramétrique d'une droite on peut avoir un vecteur directeur et un point.

$$\text{Exemples: } \Delta: \begin{cases} x = 2\alpha + 1 \\ y = 3\alpha - 5 \\ z = 6\alpha + 3 \end{cases} ; \alpha \in \mathbb{R}$$

On a alors $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}$ est un vecteur de Δ et $A(1, -5, 3)$ est un point de Δ

2) D'après la première équation du système, on trouve $\alpha = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$ les deux

$$\text{autres équations deviennent } \begin{cases} y = \frac{3}{2}x - \frac{3}{2} - 5 \\ z = 3x - \frac{3}{2} + 3 \end{cases} \text{ soit } \begin{cases} 3x - 2y - 13 = 0 \\ 3x - z = 0 \end{cases}$$

ce système est appelé les équations cartésiennes de Δ .

$$\blacksquare \Delta: \begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases} \text{ est une représentation cartésienne de la droite}$$

Δ si seulement si $ab' - a'b \neq 0$ ou $ac' - a'c \neq 0$ ou $bc' - b'c \neq 0$.

Si et seulement si a, b, c et a', b', c' ne sont pas proportionnels

Exemple: si Δ a pour représentation cartésienne $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + z - 1 = 0 \end{cases}$ on pose l'une

des inconnues x ou y ou z par α , on retrouve la représentation paramétrique :

Si on pose $x = \alpha$ le système devient
$$\begin{cases} x = \alpha \\ y = -\alpha - (1 - \alpha) \\ z = 1 - \alpha \end{cases} \text{ soit } \begin{cases} x = \alpha \\ y = -1 \\ z = 1 - \alpha \end{cases} \quad (\alpha \in \mathbb{R})$$

■ Equations paramétriques d'un plan

* Un plan est déterminé par la donnée de 3 points non alignés ou 1 point et 2 vecteurs non colinéaires.

* P est le plan passant par $A(x_0, y_0, z_0)$ et deux vecteurs non colinéaires

$$\vec{u} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \text{ et } \vec{v} \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}.$$

$$M(x, y, z) \in P \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = \alpha \vec{u} + \beta \vec{v} \text{ d'où } P: \begin{cases} x = \alpha a + \beta a' + x_0 \\ y = \alpha b + \beta b' + y_0 \\ z = \alpha c + \beta c' + z_0 \end{cases} \quad (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$$

C'est une représentation paramétrique du plan.

■ Equation cartésienne du plan P :

$$P : ax + by + cz + d = 0 \text{ avec } (a, b, c) \neq (0, 0, 0).$$

* **Remarques :**

1) Pour passer de l'équation cartésienne à une représentation paramétrique, il suffit de poser $x = \alpha$ et $y = \beta$ et en remplacer dans l'équation de plan pour avoir le système.

2) Pour passer du paramétriques au cartésienne on choisit deux équations pour avoir α et le β et on remplace dans la troisième, on obtient une équation cartésienne.

■ Vecteur d'un plan:

$$\vec{u} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \text{ est un vecteur du plan } P : ax + by + cz + d = 0$$

Si et seulement si $a\alpha + b\beta + c\gamma = 0$.

■ Positions de deux plans:

$$P(A, \vec{u}, \vec{v}), P'(B, \vec{u}', \vec{v}')$$

- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs de P' alors $P // P'$.

Si de plus $A \in P'$ alors $P = P'$

- Si l'un des vecteurs $\vec{u}$ ou $\vec{v}$ n'est pas un vecteurs de P' alors P est sécant à P' .

■ Positions droites et plans:

$$D(A, \vec{u}), P(B, \vec{v}, \vec{w})$$

- $D // P$ si et seulement si $\vec{u}$ est un vecteur de P si de plus $A \in P$ alors $D \subset P$.

- D et P sont sécants si et seulement si $\vec{u}$ n'est pas un vecteur de P .

■ Orthogonalité – distance d'un point à un point :

■ Un vecteur non nul est dit **normal d'un plan P** s'il est orthogonal à tous les vecteurs de P . Si $(\vec{U}; \vec{V})$ est une base de P et $\vec{n}$ un vecteurs normal de P alors $\vec{n} \perp \vec{u}$ et $\vec{n} \perp \vec{v}$

■ Une droite D est orthogonal à P si et seulement si $\vec{W}$ le vecteur directeurs de D est colinéaire au vecteurs normal de P .

■ a, b, c et d quatre réels données, l'ensemble des points $M(x, y, z)$ vérifiant : $ax + by + cz + d = 0$ avec $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ est un plan de vecteurs

normal $\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

■ P et P' deux plans, d'équations respectives :

$$ax + by + cz + d = 0 \text{ et } a'x + b'y + c'z + d' = 0 \text{ dans un repère orthonormal.}$$

$$* P \perp P' \Leftrightarrow \vec{n} \cdot \vec{n}' = 0 \Leftrightarrow aa' + bb' + cc' = 0.$$

■ Dans un repère orthonormé, P le plan d'équation $ax + by + cz + d = 0$

La distance d'un point $A(x_A, y_A, z_A)$ au plan P est donnée par :

$$d(A, P) = \frac{|ax_A + by_A + cz_A + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

■ Intersection de deux plans :

$$P : ax + by + cz + d = 0 ; P' : a'x + b'y + c'z + d' = 0$$

$$\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \text{ vecteur normal de } P ; \vec{n}' \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix} \text{ vecteur normal de } P'.$$

P et Q sont strictement parallèles $\Leftrightarrow \vec{n} = \alpha \cdot \vec{n}'$ et $\alpha d' \neq d$.

* P et Q sont parallèles $\Leftrightarrow \vec{n} = \alpha \cdot \vec{n}' \Leftrightarrow \vec{n}$ et $\vec{n}'$ sont colinéaires.

* P et Q sont sécantes $\Leftrightarrow$ P et Q non parallèles $\Leftrightarrow \vec{n}$ et $\vec{n}'$ non colinéaires.

■ Intersection droite et plan :

P : $ax + by + cz + d = 0$; $\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ vecteur normal de P. $\vec{u} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \delta \end{pmatrix}$ est un vecteur

directeur de la droite Δ qui passe par $A(x_A, y_A, z_A)$.

* $\Delta // P \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{n} = 0 \Leftrightarrow \alpha a + \beta b + \delta c = 0$

Si de plus $ax_A + by_A + cz_A + d = 0$ alors $A \in P$ donc $\Delta \subset P$

et si $ax_A + by_A + cz_A + d \neq 0$ alors $A \notin P$ donc Δ est parallèle strictement à P.

* Δ coupe P $\Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{n} \neq 0$

Sphère :

■ Définition :

Soit R un réel strictement positif, I un point de l'espace. L'ensemble des points M de l'espace tels que :

$IM = R$ est la sphère de centre I et de rayon R, noté : $S(I, R)$

■ Théorème :

Soient A et B deux points de l'espace. La sphère de diamètre [AB] est l'ensemble de points M de l'espace tels que $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} = 0$.

■ Equation cartésienne d'une sphère :

Soient $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère orthonormé, le point $A(x_A, y_A, z_A)$ de l'espace et r un réel strictement positif.

La sphère S de centre A de rayon r est l'ensemble des points $M(x, y, z)$ tel que :

$$(x - x_A)^2 + (y - y_A)^2 + (z - z_A)^2 = r^2,$$

c'est l'équation cartésienne de S.

* En développant cette équation on obtient alors une équation de la forme : $x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0$.

■ Positions Sphère et plan :

$P : ax + by + cz + d = 0$ et S de centre I de rayon R .

* Si $d(I, P) = R \Rightarrow S \cap P = \{H\}$ H est le projeté orthogonal de I sur P .

On dit que P est tangent à S .

* Si $d(I, P) > R \Rightarrow S \cap P = \emptyset$. On dit que P est extérieur à S .

* Si $d(I, P) < R \Rightarrow S \cap P$ est un cercle de centre H de rayon $\sqrt{R^2 - d^2}$.

On dit P et S sont sécants.

Le point H vérifie $\overrightarrow{IH} = \alpha \vec{n}$ où $\vec{n}$ vecteur normal de P et $H \in P$.

Remarque : Si $d(I, P) = 0$ alors $S \cap P$ est le cercle de centre I et de rayon R .

■ Théorème :

L'ensemble des points $M(x, y, z)$ tel que $x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0$ est :

* Une sphère de centre $I\left(\frac{-a}{2}, \frac{-b}{2}, \frac{-c}{2}\right)$ de rayon $R = \sqrt{h}$

$$\text{si } h = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4} - d > 0.$$

* Un singleton $\left\{ I\left(\frac{-a}{2}, \frac{-b}{2}, \frac{-c}{2}\right) \right\}$ si $h = 0$.

* Le vide si $h < 0$.