

Chapitre I

Généralités sur les fonctions

Définition d'une fonction :

- Une fonction est une relation qui a tout élément d'un ensemble A de départ associe au plus un élément appelé image dans l'ensemble d'arrivée B :

- Notation: $f : A \rightarrow B$

$$x \mapsto f(x) = y$$

d'une fonction f dans un repère

On lit y égale f de x.

Ensemble de définition.

- On dit que f est définie sur un ensemble D .

Si et seulement si pour tout x de D f (x) existe.

Représentation graphique :

La représentation graphique est l'ensemble des points $M(x, f(x))$
 $(o, \vec{i}, \vec{j})$

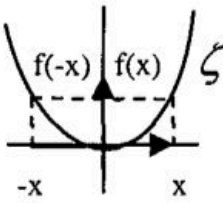
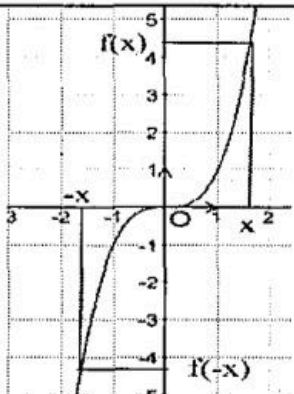
Définition :

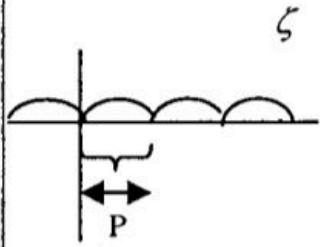
Soit f définie sur D, I une partie de D.

On appelle restriction de f à I, la fonction g définie sur I par $g(x) = f(x)$

Exemple : $f(x) = x^2$ sur $\mathbb{R}$

$g(x) = x^2$ sur $\mathbb{R}_+$ alors g est la restriction de f sur $\mathbb{R}_+$

Propriétés	Relation	Intervalle d'étude	Propriétés pour ζ_f	Représentation
paire	Pour tout $x \in D$, $\begin{cases} -x \in D \\ f(-x) = f(x) \end{cases}$	$\mathbb{R}_+ \cap D$	Dans un repère orthogonal (oy) axe de symétrie de ζ_f	
Impaire	Pour tout $x \in D$ on ait $\begin{cases} -x \in D \\ f(-x) = -f(x) \end{cases}$	$\mathbb{R}_+ \cap D$	Dans un repère O est un centre de symétrie de ζ_f	

Périodique (de période P) $P > 0$	Pour tout $x \in D$ on ait $\begin{cases} x+p \in D \\ f(x+p)=f(x) \end{cases}$	$[x_0, x_0+p] \cap I = I$	ζ_r est obtenue en translatant la courbe f sur I par le vecteur $p k \vec{i}$ avec $k \in \mathbb{Z}$	
---	--	---------------------------	---	---

Sens de variation

f une fonction et I un intervalle continue dans le domaine de définition de f.

• f est **croissante** sur I

Si et seulement si pour tout $a, b \in I$

Si $a \leq b$ alors $f(a) \leq f(b)$

• f est **décroissante** sur I

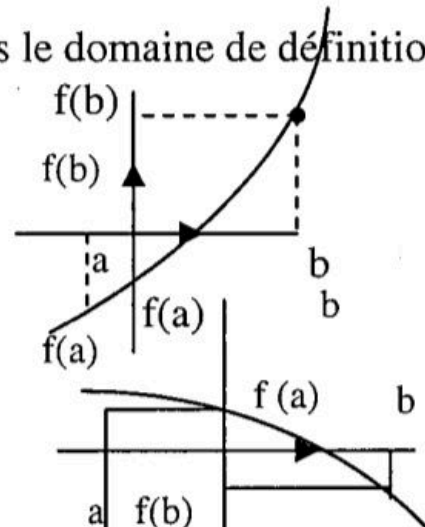
Si et seulement si pour tout $a, b \in I$

Si $a \leq b$ alors $f(a) \geq f(b)$

• f est **constante** sur I signifie que pour tout $a, b \in I$ on a $f(a) = f(b)$

• f est **monotone** signifie que

f est Croissante où décroissante.



Théorèmes:

• f est croissante et positive sur I $\Rightarrow \sqrt{f}$ est croissante sur I

• f est décroissante et positive sur I $\Rightarrow \sqrt{f}$ est décroissante sur I

Majorant – Minorant

f est une fonction définie sur I

• $M \in \mathbb{R}$, On dit que f est **majorée** sur I par M

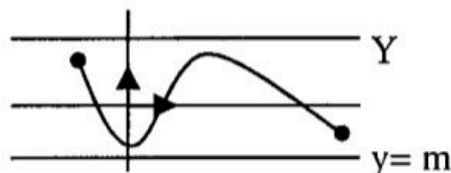
Si et seulement si pour tout $x \in I$, $f(x) \leq M$

• $m \in \mathbb{R}$, on dit que f est **minorée** sur I par m

Si et seulement si pour tout $x \in I$; $f(x) \geq m$.

• f est **bornée** sur I si et seulement si il existe $m, M \in \mathbb{R}$ tel que $m \leq f(x) \leq M$

Exemple :



• Remarque :

Si M est majorant de f alors tout réel M' tel que $M' \geq M$ est un majorant de f .

Si m est un minorant de f alors tout réel tel que $m' < m$ est un minorant de f .

Maximum – Minimum

f définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$

• $x_0 \in I$, on dit que f présente en x_0 un maximum égal à $f(x_0)$

si et seulement si, pour tout $x \in I$, $f(x) \leq f(x_0)$

• $x_0 \in I$, on dit f présente en x_0 un minimum égal à $f(x_0)$

si et seulement si pour tout $x \in I$, $f(x_0) \leq f(x)$

Opérations sur les fonctions:

1) **Produit** d'une Fonction par un réel k :

$$(kf)(x) = k \cdot f(x)$$

• Domaine de définition de $k \cdot f$ est égale à D_f

• $k > 0 \Rightarrow f$ et $k \cdot f$ ont même sens de variation

• $k < 0 \Rightarrow f$ et $k \cdot f$ ont des sens de variation contraires

2) Fonction **somme** : $f + g$

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

$$D_{f+g} = D_f \cap D_g$$

• f et g est croissante sur $I \Rightarrow f + g$ est croissante

• f et g est décroissante sur $I \Rightarrow f + g$ est décroissante sur I

3) Fonction **produit** : $f \times g$

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$$

Domaine de définition de $f \times g$ est égale à $D_f \cap D_g$

On peut en déduire pour les variations.

Réflexes

Situations	Réflexes
• Comment étudier la parité d'une fonction ?	Il faut vérifier • Si D_f est symétrique par rapport à 0 puis on teste alors $f(-x) = \pm f(x)$

• Comment interpréter graphiquement les équations et les inéquations ?	• ζ et ζ' les courbes respectives de f et g → Les solutions de l'équation $f(x)=g(x)$ sont les abscisses des points d'intersection de ζ_f et ζ_g → les solutions de l'inéquation $f(x) \leq g(x)$ sont les abscisses des points de ζ_g situés au dessus de ζ_f
Comment montrer qu'un nombre réel M est majorant de f? (où m un minorant de f?)	• Etudier le signe de $f(x) - M$ et prouver que $f(x)-M \leq 0$ (respectivement) $f(x)-m \geq 0$ • utiliser les opérations sur les inégalités • utiliser le tableau de variation.
ζ_f la courbe de f comment représentent les fonctions g, h, L? $g(x) = f(x + k)$	• $\zeta_g = t_{-k\vec{i}}(\zeta_f)$
$h(x) = f(x) + k$	• $\zeta_h = t_{k\vec{j}}(\zeta_f)$
$L(x) = k f(x)$	• ζ_L c'est l'ensemble des points M' tel que $\begin{cases} x' = x \\ y' = ky \end{cases} \quad (M(x, y) \in \zeta_f)$
Comment étudier les variations d'une fonction ?	• On utilise la définition $a < b$ on étudie le signe de $f(b) - f(a)$. • On cherche le signe du taux de variation $T = \frac{f(a) - f(b)}{a - b}$ • On utilise les opérations sur les fonctions.