

Le produit scalaire

I Les bases

Définition : norme d'un vecteur

Soit $\overrightarrow{AB}$ le **représentant** d'un vecteur $\vec{u}$. La longueur AB est la **norme** du vecteur $\vec{u}$. On la note $\|\vec{u}\|$.

1 Calcul de norme

Soit un repère orthonormé $(0, \vec{i}, \vec{j})$ et les points $A(4; -5)$, $B(-5; -2)$. Déterminer la norme du vecteur $\overrightarrow{AB}$.

Définition : produit scalaire

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls. Le produit **scalaire** de ces deux vecteurs est le nombre réel défini par :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\theta) \text{ où } \theta = (\vec{u}, \vec{v}) \quad (10.1)$$

Si $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = AB \times AC \times \cos(\theta)$ où $\theta = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$

Définition : carré scalaire

Le **carré scalaire** de $\vec{u}$ est le produit scalaire de $\vec{u}$ par lui-même : $\vec{u}^2 = \vec{u} \cdot \vec{u}$

Propriété : norme et carré scalaire

$$\vec{u}^2 = \|\vec{u}\|^2$$

$$\overrightarrow{AB}^2 = AB^2$$

Preuve $\vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{u}\| \times \cos(0) = \|\vec{u}\|^2$ ■

Propriété : le produit scalaire et les normes

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} (\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2) \quad (10.2)$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} (\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2) \quad (10.3)$$

Preuve ??

$$\begin{aligned} \|\vec{u} + \vec{v}\|^2 &= (\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = \vec{u} \cdot \vec{u} + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{v} \\ &= \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2 \end{aligned} \quad (10.4)$$

■

Propriété : calcul vectoriel

- Si $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$ alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ (vecteur nul donc produit nul)
- $\forall \lambda \in \mathbb{R} \quad (\lambda \vec{u}) \cdot \vec{v} = \lambda (\vec{u} \cdot \vec{v})$ (produit par un nombre)
- $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$ (distributivité)
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$ (commutativité)
- Pour $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non nuls, si l'angle est « aigu » alors $\vec{u} \cdot \vec{v}$ est positif et si l'angle est « obtus » alors $\vec{u} \cdot \vec{v}$ est négatif (signe)

Propriété : le produit scalaire en repère orthonormé

Soient $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ dans un repère orthonormé $(0, \vec{i}, \vec{j})$ alors

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' \quad (10.5)$$

Preuve

?? D'après ??

$$A = 2\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2 \text{ donc avec } \vec{u} + \vec{v} = \begin{pmatrix} x+x' \\ y+y' \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} A &= (x+x')^2 + (y+y')^2 - (x^2 + y^2) - (x'^2 + y'^2) \\ &= x^2 + x'^2 + 2xx' + y^2 + y'^2 + 2yy' - x^2 - y^2 - x'^2 - y'^2 \\ &= 2(xx' + yy') \end{aligned} \quad (10.6)$$

■

Méthode : mesurer un angle de triangle

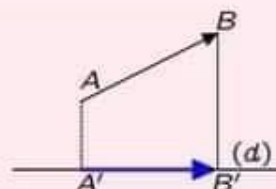
En effectuant le calcul du produit scalaire avec la formule « normes et angle » et avec la formule « coordonnées », il est possible de déterminer un angle de triangle.

- 2 Soient $A(-2; 3)$, $B(1; 1)$ et $C(0; -1)$. Déterminer l'angle $\widehat{BAC}$.

Définition : projection orthogonale

Soit un vecteur $\overrightarrow{AB}$ et A' et B' les projections orthogonales de A et B sur (d) .

La projection orthogonale du vecteur $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ sur (d) est le vecteur $\vec{u}_1 = \overrightarrow{A'B'}$.



Propriété : le produit scalaire et la projection orthogonale

Si $\vec{v}_1$ est la projection orthogonale de $\vec{v}$ sur une droite de direction $\vec{u}$

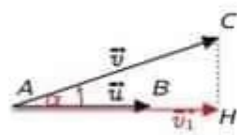
$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{v}_1 \quad (= \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}_1\| \text{ ou } = -\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}_1\|) \quad (10.7)$$

Preuve

??.

Cette démonstration se rapproche de la projection de vecteur en physique.

1er cas :



$$\begin{aligned} \vec{u} \cdot \vec{v} &= \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \cos \alpha = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}_1\| \\ \vec{u} \cdot \vec{v}_1 &= \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}_1\| \cos 0 = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}_1\| \end{aligned}$$

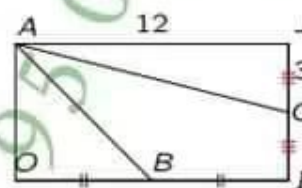
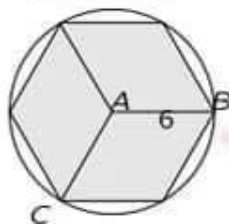
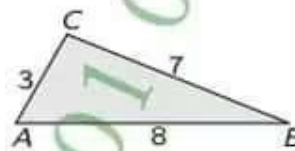
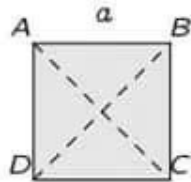
2ème cas :



On constate que $\alpha = \pi - \beta$, donc $\cos \beta = -\cos \alpha$.

$$\begin{aligned} \vec{u} \cdot \vec{v} &= \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \cos \alpha = -\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \cos \beta \\ &= -\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}_1\| \\ \vec{u} \cdot \vec{v}_1 &= \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}_1\| \cos \pi = -\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}_1\| \end{aligned}$$

3 *Calculs* Dans chacun des cas suivants, choisir l'expression la plus adaptée pour calculer le produit scalaire $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$.



Définition : vecteurs orthogonaux

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont dits **orthogonaux** si $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.
On note $\vec{u} \perp \vec{v}$

4 *Vecteurs orthogonaux*

$\vec{u} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 1 - \sqrt{3} \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 1 + \sqrt{3} \end{pmatrix}$ sont-ils orthogonaux ?

Propriété : caractérisations de l'orthogonalité

- $\vec{u} \perp \vec{v}$ (non nuls) équivaut à $(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\pi}{2}[\pi]$
- si $\vec{u} \perp \vec{v}$ alors le projeté de $\vec{v}$ sur une droite de direction $\vec{u}$ est le vecteur nul
- $\vec{u} \perp \vec{v} \iff \|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2$
- Si $A \neq B$ et $C \neq D$ alors $(AB) \perp (CD) \iff \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$
- dans un repère orthonormé $(0, \vec{i}, \vec{j})$ avec $\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$

$$\vec{u} \perp \vec{v} \iff xx' + yy' = 0$$

Preuve

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}, \vec{v})$.
Ainsi $\cos(\vec{u}, \vec{v}) = 0$ car les vecteurs sont non nuls. Par suite $(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\pi}{2}[\pi]$.
- Par ?? $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 = \vec{u} \cdot \vec{v}_1^*$. Or $\vec{v}_1^*$ est colinéaire à $\vec{u}$ donc $\vec{v}_1^* = \vec{0}$.
- Voir ??
- RAD (rien à démontrer)
- L'angle est droit donc le produit scalaire est nul et réciproquement, si le produit scalaire est nul on se trouve dans l'item précédent.

Théorème : Al Kashi ou Pythagore dans un triangle quelconque

Dans un triangle quelconque ABC :

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2 \times AB \times BC \times \cos(\widehat{ABC})$$

Preuve

$$\begin{aligned} AC^2 &= \overrightarrow{AC}^2 = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC})^2 \\ &= AB^2 + BC^2 + 2 \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} \\ &= AB^2 + BC^2 - 2 \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} \end{aligned}$$

Propriété : vecteur orthogonal à un vecteur donné

Soit $\vec{u} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ un vecteur alors le vecteur $\vec{v} = \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ est orthogonal à $\vec{u}$ et ils ont des normes égales..

Preuve

$$\begin{aligned} a \times (-b) + a \times b &= 0 \text{ donc } \vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \\ \|\vec{v}\| &= \sqrt{(-b)^2 + a^2} = \sqrt{a^2 + b^2} = \|\vec{u}\| \end{aligned}$$

II Mesurer

Définition : vecteur normal

Soit $\mathcal{D}$ une droite de vecteur directeur $\vec{u}$. On appelle **vecteur normal** à $\mathcal{D}$ tout vecteur $\vec{n}$ non nul orthogonal à $\vec{u}$.

Théorème : équation d'une droite de vecteur normal donné

- Une droite d'équation $\mathcal{D}$ d'équation $ax + by + c = 0$ (dans un repère orthonormal) admet comme vecteur normal :

$$\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

- La droite $\mathcal{D}$ passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$ admet comme équation :

$$\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$$

Preuve

- La droite d'équation $ax + by + c = 0$ admet $\vec{u} \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ comme vecteur directeur donc un vecteur normal à $\vec{u}$ qui est $\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

- Soit B tel que $\overrightarrow{AB} = \vec{n}$. Alors :

$$\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0 \iff \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$$

$$\iff \overrightarrow{AM} = 0 \text{ ou les droites } (AM) \text{ et } (AB) \text{ sont perpendiculaires .}$$

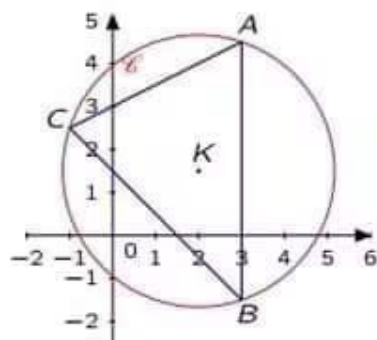
$$\iff M = A \text{ ou } M \text{ appartient à la droite } \mathcal{D} \text{ perpendiculaire à } (AB) \text{ passant par } A.$$

5 Droite et vecteur normal

- Déterminer un vecteur normal de la droite d'équation $-5x + 3y - 1 = 0$.
- Déterminer une équation de la droite passant par $A(2; -1)$ et de vecteur normal

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

6 Recherche de droites



Dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan, on considère le cercle $\mathcal{C}$ de centre $K(2; 1,5)$ passant par les points $A(3; 4,5)$, $B(3; -1,5)$ et $C(-1; 2,5)$.

Déterminer une équation cartésienne des droites suivantes :

- La hauteur du triangle ABC issue du point B .
- La médiatrice du segment $[BC]$.
- La tangente en A au cercle $\mathcal{C}$.

Propriété : produit scalaire et cercle

Soit A et B deux points du plan. L'ensemble des points M du plan vérifiant $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$ est le cercle de diamètre $[AB]$

Preuve

- Si $M = A$ ou B alors $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$
- Supposons M distant de A et B .
 M appartient au cercle de diamètre $[AB]$ si et seulement si le triangle AMB est rectangle en M si et seulement si $\overrightarrow{MA}$ et $\overrightarrow{MB}$ sont orthogonaux si et seulement si $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$

■

Propriété : équation de cercle

L'équation du cercle de centre $S(\alpha; \beta)$ et de rayon R est :

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = R^2$$

qu'on peut écrire

$$x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y = c \text{ ou } c = R^2 - \alpha^2 - \beta^2$$

Preuve

Un point $M(x, y)$ appartient au cercle $\mathcal{C}$ de centre $\omega(\alpha; \beta)$ de rayon R si et seulement si $\Omega M^2 = R^2$ si et seulement si $(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = R^2$.

■

7 Équation de cercle

- Déterminer l'équation de $\mathcal{C}$ cercle de centre $\Omega(3; -4)$ et de rayon 7.
- Déterminer l'équation de $\mathcal{C}$ cercle de diamètre $[AB]$ avec $A(4; -5)$ et $B(-6; 8)$.
- Déterminer l'équation de $\mathcal{C}$ cercle de centre $\Omega(-2; 3)$ passant par le point $A(2; 1)$.

8 *Reconnaissance* Les ensembles définis par les équations ci-dessous sont-ils des cercles ? Si oui en donner les caractéristiques.

- $x^2 + y^2 - 4x + 5y - 10 = 0$.
- $x^2 + y^2 - 5x + 6y = -40$.

Propriété : formules d'addition

Soit a et b deux réels quelconques :

$$\cos(a - b) = \cos(a) \cos(b) + \sin(a) \sin(b)$$

$$\cos(a + b) = \cos(a) \cos(b) - \sin(a) \sin(b)$$

$$\sin(a + b) = \sin(a) \cos(b) + \cos(a) \sin(b)$$

$$\sin(a - b) = \sin(a) \cos(b) - \cos(a) \sin(b)$$

Preuve

Soient deux points du cercle trigonométrique $A(\cos(a); \sin(a))$ et $B(\cos(b); \sin(b))$.

Le produit scalaire avec l'angle :

$$\vec{OA} \cdot \vec{OB} = OA \times OB \times \cos(b - a)$$

$$\vec{OA} \cdot \vec{OB} = 1 \times 1 \times \cos(b - a)$$

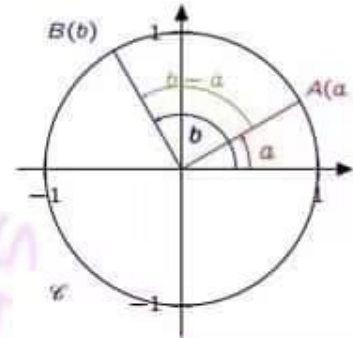
$$\bullet \vec{OA} \cdot \vec{OB} = \cos(b - a) = \cos(a - b)$$

Et avec les coordonnées :

$$\vec{OA} \cdot \vec{OB} = \cos(a) \cos(b) + \sin(a) \sin(b)$$

Ainsi

$$\cos(a - b) = \cos(a) \cos(b) + \sin(a) \sin(b) \quad (10.8)$$



• $\cos(a + b) = \cos(a) \cos(b) - \sin(a) \sin(b)$ s'obtient en reprenant ?? et en remplaçant b par $-b$ et en utilisant $\cos(-x) = \cos(x)$ et $\sin(-x) = -\sin(x)$.

• En utilisant $\sin(x) = \cos(\frac{\pi}{2} - x)$ et $\cos(x) = \sin(\frac{\pi}{2} - x)$, on calcule $\sin(a + b)$.
En effet, $\sin(a + b) = \cos(\frac{\pi}{2} - (a + b)) = \cos([\frac{\pi}{2} - a] - b) = \cos(\frac{\pi}{2} - a) \cos b + \sin(\frac{\pi}{2} - a) \sin(b)$

• Enfin $\sin(a - b) = \sin(a) \cos(b) - \cos(a) \sin(b)$ s'obtient en remplaçant b par $-b$ et en utilisant $\cos(-x) = \cos(x)$ et $\sin(-x) = -\sin(x)$.

■

Propriété : formules de duplication

Soit a un réel quelconque, on a :

$$\sin(2a) = 2 \sin(a) \cos(a)$$

$$\cos(2a) = \cos^2(a) - \sin^2(a)$$

$$\cos(2a) = 2 \cos^2(a) - 1$$

$$\cos(2a) = 1 - 2 \sin^2(a)$$

Preuve

Il suffit de remplacer b par a dans les formules de $\cos(a + b)$ et $\sin(a + b)$.

■

Propriété : mesurer une hauteur de triangle rectangle

$$AH^2 = HB \times HC$$

Preuve

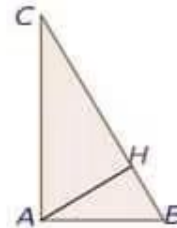
$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 0 \text{ donc}$$

$$0 = (\vec{AH} + \vec{HB}) \cdot (\vec{AH} + \vec{HC})$$

$$0 = AH^2 + \vec{AH} \cdot \vec{HC} + \vec{HB} \cdot \vec{AH} + \vec{HB} \cdot \vec{HC}$$

$$0 = AH^2 + 0 + 0 + \vec{HB} \cdot \vec{HC}$$

$$\text{Ainsi : } AH^2 = -\vec{HB} \cdot \vec{HC} = HB \times HC$$



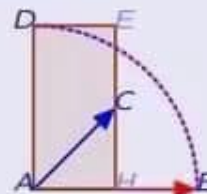
■

Propriété : mesurer l'aire d'un rectangle

Le produit scalaire

$$\vec{AC} \cdot \vec{AB}$$

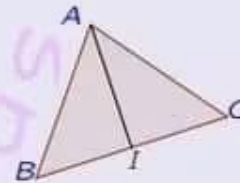
est égal à l'aire du rectangle ADEH.



Preuve $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} = AH \times AB = AH \times AD$ ■

Propriété : mesurer une médiane de triangle

$$AI^2 = \frac{1}{2} (AB^2 + AC^2) - \frac{1}{4} BC^2$$



Preuve

$$AB^2 + AC^2 = (\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IB})^2 + (\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IC})^2$$

$$AB^2 + AC^2 = AI^2 + IB^2 + 2\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{IB} + AI^2 + IC^2 + 2\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{IC}$$

$$AB^2 + AC^2 = 2AI^2 + 2IB^2 + 2\overrightarrow{AI} \cdot (\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC})$$

■

Méthode : Calculer la distance de M à la droite d

Cette distance d (la plus courte entre le point et la droite) est représentée par MH (penser à Pythagore, la hauteur est plus courte que l'hypoténuse)

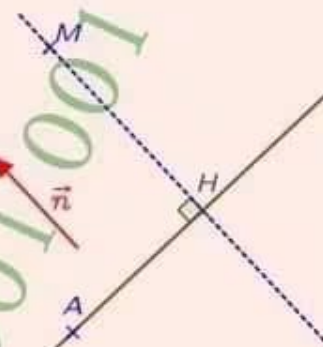
$$\overrightarrow{MA} \cdot \vec{n} = (\overrightarrow{MH} + \overrightarrow{HA}) \cdot \vec{n}$$

$\overrightarrow{HA}$ et $\vec{n}$ sont orthogonaux ; $\overrightarrow{MH}$ et $\vec{n}$ sont (ici) de sens opposés

$$\overrightarrow{MA} \cdot \vec{n} = \overrightarrow{MH} \cdot \vec{n} = -MH \times \|\vec{n}\|$$

au final

$$d = MH = \frac{|\overrightarrow{MA} \cdot \vec{n}|}{\|\vec{n}\|}$$



Rappel du cours

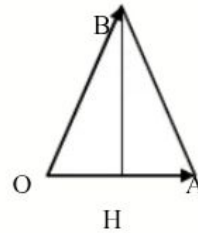
Produit scalaire dans le plan

Définition

1) On appelle produit scalaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et on note $\vec{u} \cdot \vec{v}$ le réel défini par

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ si $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OH}$ avec $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$

et H le projeté orthogonal de B sur (OA)



2) $\vec{u} \cdot \vec{v} = \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = OA \cdot OB \cdot \cos \hat{AOB}$ si $\vec{u} \neq \vec{0}$ ou $\vec{v} \neq \vec{0}$

Propriétés algébriques

Soit $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$ sont trois vecteurs, et soit α et β deux réels

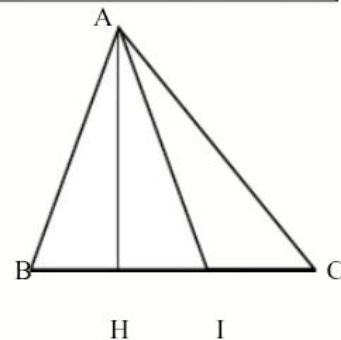
$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$	$\vec{u} \cdot \vec{u} = \ \vec{u}\ ^2 = \vec{u}^2$
$\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$	$\vec{u} \cdot (\alpha \vec{v}) = (\alpha \vec{u}) \cdot \vec{v} = \alpha (\vec{u} \cdot \vec{v})$
$(\alpha \vec{u}) \cdot (\beta \vec{v}) = \alpha\beta (\vec{u} \cdot \vec{v})$	$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ ssi $\vec{u} \perp \vec{v}$
$\ \vec{u} + \vec{v}\ ^2 = \ \vec{u}\ ^2 + \ \vec{v}\ ^2 + 2 \ \vec{u}\ \cdot \ \vec{v}\ $	$\ \vec{u} - \vec{v}\ ^2 = \ \vec{u}\ ^2 + \ \vec{v}\ ^2 - 2 \ \vec{u}\ \cdot \ \vec{v}\ $
$(\vec{u} - \vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = \ \vec{u}\ ^2 - \ \vec{v}\ ^2 = \vec{u}^2 - \vec{v}^2$	$ \vec{u} \cdot \vec{v} \leq \ \vec{u}\ \cdot \ \vec{v}\ $
$ \vec{u} \cdot \vec{v} = \ \vec{u}\ \cdot \ \vec{v}\ \iff \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont colinéaires}$	

Théorème de la médiane

I le milieu de [BC] on a pour tout point A du plan :

- $AB^2 + AC^2 = 2 AI^2 + \frac{BC^2}{2}$
- $AB^2 - AC^2 = 2 \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{IA} = 2 \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{IH}$

Avec H le projeté orthogonal de A sur (BC)



Propriété: Pour tout point A, B et C on a $\overrightarrow{AB} = (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB})$

$$\overrightarrow{AB}^2 = (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB})^2 = AC^2 + CB^2 - 2 \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CB}$$

On obtient alors $AB^2 = AC^2 + CB^2 - 2 AC \cdot CB \cdot \cos ACB$ formule d'EL kashi

Propriétés analytiques : dans un repère orthonormé (O , $\vec{i}$, $\vec{j}$) on considère $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ on a :

$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$	$\ \vec{u}\ = \sqrt{x^2 + y^2}$
$\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow xx' + yy' = 0$	$\vec{0}$ est orthogonal à tout vecteur
La distance d'un point A(x_0 , y_0) à une droite Δ d'équation $ax + by + c = 0$ est le réel $\frac{ a x_0 + b y_0 + c }{\sqrt{a^2 + b^2}}$	

Réflexes :

<u>Situations</u>	<u>Réflexes</u>
Calculer le produit scalaire de deux vecteurs $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$	a) On utilise $\ \vec{AB}\ \ \vec{AC}\ \cos \hat{BAC}$ b) On utilise $\vec{AB} \cdot \vec{AH}$ avec H projeté orthogonale de c sur (AB) c) $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = xx' + yy'$ d) On utilise la relation de chasles et les propriétés du produit scalaire
Démontrer l'orthogonalité de deux vecteurs	On démontre que leur produit scalaire est nul
Calculer une distance AB	a) On écrit $AB^2 = \vec{AB} \cdot \vec{AB}$ b) Théorème de la médiane
Calculer un angle $\hat{BAC}$	On applique la formule : $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = AB.AC.\cos \hat{BAC}$

Produit scalaire dans le plan

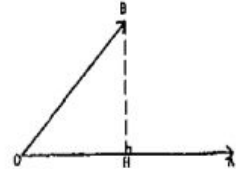
■ Définitions

1) On appelle produit scalaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et on note $\vec{u} \cdot \vec{v}$ le réel défini par

* $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ si $\vec{v} = \vec{0}$ ou $\vec{u} = \vec{0}$.

* $\vec{u} \cdot \vec{v} = \overline{OA} \cdot \overline{OH}$ avec $\vec{u} = \overline{OA}$, $\vec{v} = \overline{OB}$

et H le projeté orthogonal de B sur (OA)



2) $\vec{u} \cdot \vec{v} = \overline{OA} \cdot \overline{OB} = OA \cdot OB \cos \widehat{AOC}$ si $\vec{v} \neq \vec{0}$ et $\vec{u} \neq \vec{0}$

et $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ si $\vec{v} = \vec{0}$ ou $\vec{u} = \vec{0}$

■ Propriétés Algébriques

Soit $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont trois vecteurs, les réels α et β Soit

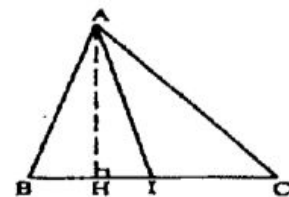
$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$	$\vec{u} \cdot \vec{u} = \ \vec{u}\ ^2 = \left(\vec{u}\right)^2$
$\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$	$\vec{u} \cdot (\alpha \cdot \vec{v}) = (\alpha \cdot \vec{u}) \cdot \vec{v} = \alpha \cdot (\vec{u} \cdot \vec{v})$
$(\alpha \vec{u}) \cdot (\beta \vec{v}) = \alpha \beta (\vec{u} \cdot \vec{v})$	$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow \vec{u} \perp \vec{v}$
$\ \vec{u} + \vec{v}\ ^2 = \ \vec{u}\ ^2 + \ \vec{v}\ ^2 + 2\ \vec{u}\ \cdot \ \vec{v}\ $	$\ \vec{u} - \vec{v}\ ^2 = \ \vec{u}\ ^2 + \ \vec{v}\ ^2 - 2\ \vec{u}\ \cdot \ \vec{v}\ $
$(\vec{u} - \vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = \ \vec{u}\ ^2 - \ \vec{v}\ ^2 = \vec{u}^2 - \vec{v}^2$	$ \vec{U} \cdot \vec{V} \leq \ \vec{U}\ \times \ \vec{V}\ $
$ \vec{U} \cdot \vec{V} = \ \vec{U}\ \times \ \vec{V}\ \Leftrightarrow \vec{U} \text{ et } \vec{V} \text{ sont colinéaires}$	

■ Théorème de la médiane:

I le milieu de [BC] on a pour tout point A du plan :

$$* AB^2 + AC^2 = 2AI^2 + \frac{BC^2}{2}$$

$$* AB^2 - AC^2 = 2\overline{BC} \cdot \overline{IA} = 2\overline{BC} \cdot \overline{IH}$$



avec H le projeté orthogonal de A sur (BC)

■ **Propriété** : Pour tout point A, B, C on a : $\overline{AB} = (\overline{AC} + \overline{CB})$

$$\overline{AB}^2 = (\overline{AC} + \overline{CB})^2 = AC^2 + CB^2 - 2\overline{AC} \cdot \overline{BC}$$

On obtient alors $AB^2 = AC^2 + CB^2 - 2AC \cdot BC \cos \widehat{ACB}$ Formule d'El Kaschi

■ **Propriétés analytiques** : Dans un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ on

considère $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ on a :

$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$	$\ \vec{u}\ = \sqrt{x^2 + y^2}$
$\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow xx' + yy' = 0$	$\vec{0}$ est orthogonal à tout vecteur
La distance d'un point $A(x_0, y_0)$ à une droite Δ d'équation $ax + by + c = 0$ est le réel $\frac{ ax_0 + by_0 + c }{\sqrt{a^2 + b^2}}$.	

Réflexes :

Situations	Réflexes
Calculer le produit scalaire de deux vecteurs $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$	a) On utilise $\ \vec{AB}\ \cdot \ \vec{AC}\ \cos \widehat{BAC}$ b) On utilise $\vec{AB} \cdot \vec{AH}$ avec H projeté $\perp$ de C sur (AB) (on peut projeté seulement soit sur (AB) où sur (AC)) c) $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = xx' + yy'$ d) On utilise la relation de Chasles et les propriétés du produit scalaire
Démontrer l'orthogonalité de deux vecteurs	On démontre que leur produit scalaire est nul
Calculer une distance AB	a) On écrit $AB^2 = \vec{AB} \cdot \vec{AB}$ b) Mesure de la médiatrice (théorème de la médiane)
Calculer un angle $\widehat{BAC}$	1) On applique la formule $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = AB \cdot AC \cos \widehat{BAC}$ pour calculer $\cos \widehat{BAC}$

Déterminer une ligne de niveau des applications $M \mapsto \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB}$ $M \mapsto MA^2 + MB^2$ $M \mapsto MA^2 - MB^2$	transformer les expressions à l'aide de la relation de Chasles (En faisant intervenir le milieu [AB] et se référer aux théorèmes de cours.
$M \mapsto \frac{MA}{MB} = k \text{ avec } k > 0$	*Si $k = 1$ alors l'ensemble est la médiatrice [AB] *Si $k \neq 1$ alors l'ensemble est le cercle $\xi_{[IJ]}$ tel que I et J sont les barycentres respectives de $\{(A, 1), (B, -k)\}$ et $\{(A, 1), (B, k)\}$.
$M \mapsto \alpha MA^2 + \beta MB^2$ $(\alpha + \beta \neq 0)$	Transformer l'expression à l'aide de la relation de Chasles. (En faisant intervenir G et G' les barycentres respectives de $\{(A, \alpha), (B, \beta)\}$ et $\{(A, \alpha), (B, -\beta)\}$