

Généralités sur les fonctions

CHAPITRE

1

Introduction

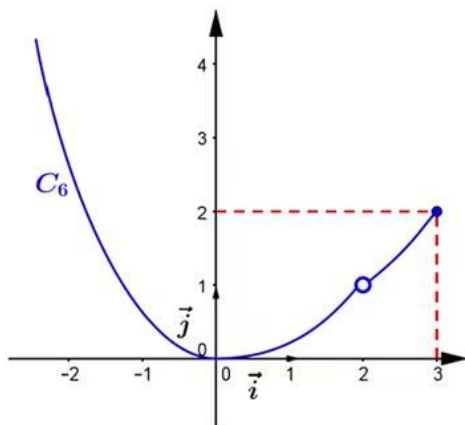
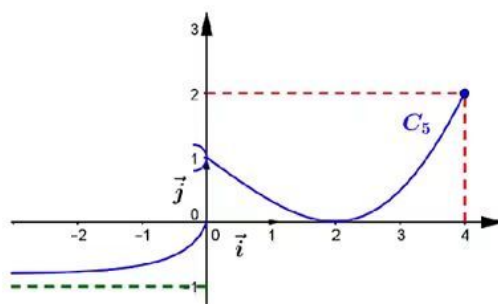
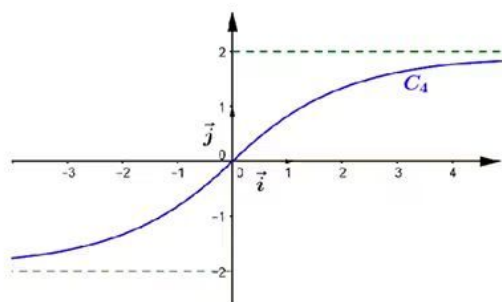
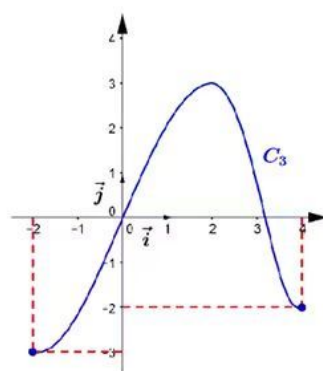
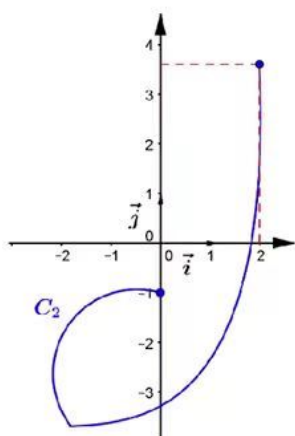
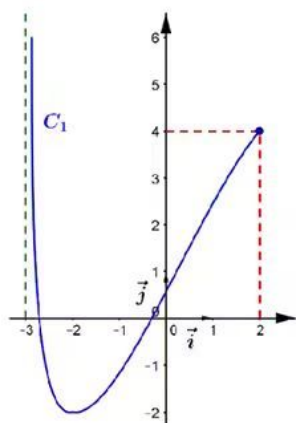
Activité 1



Représentation graphique d'une fonction

Le plan est muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Parmi les courbes C_1 , C_2 , C_3 , C_4 et C_5 tracées ci-dessous, préciser celles qui représentent graphiquement une fonction et préciser l'ensemble de définition de la fonction en question.



Activité 2



L'ensemble de définition d'une fonction

Déterminer l'ensemble de définition de chacune des fonctions suivantes.

a) $f: x \mapsto \frac{5x-1}{x+3}$;

b) $g: x \mapsto \sqrt{1-x}$;

c) $h: x \mapsto \frac{4}{6-x} - \frac{1}{x}$;

d) $k: x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1+x}} + \frac{1}{x-1}$.

Définition Soit D une partie non vide de IR.

Définir une fonction sur D, c'est associer à chaque réel x de D un unique réel noté $f(x)$.

Attention • Lorsque l'ensemble de définition d'une fonction n'est pas donné, il faut le préciser : c'est le plus grand ensemble des réels x pour lesquels $f(x)$ est bien défini.

- Ne pas confondre la fonction f et le réel $f(x)$.
- La variable est x muette, on pourrait très bien écrire $t \mapsto f(t)$ ou $x \mapsto f(x)$ etc...

Partir d'un bon pied

A

5

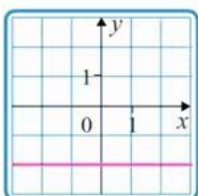
Fonctions affines

Pour chaque question, il y a une ou plusieurs bonnes réponses

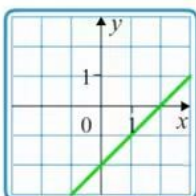
1

Indiquer quelle est la courbe représentative de la fonction f définie sur IR par : $f(x) = -2$.

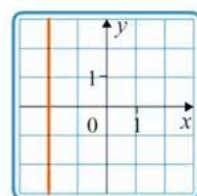
a)



b)



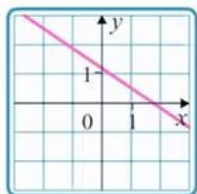
c)



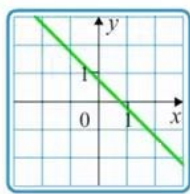
2

Indiquer quelle est la courbe représentative de la fonction f définie sur IR par : $f(x) = -\frac{2}{3}x + \frac{5}{6}$.

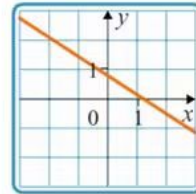
a)



b)



c)



3

Dans un repère, on donne les points $A(2,2)$ et $B(6,4)$.

La droite (AB) est la représentation graphique de la fonction :

a) $f(x) = -x + 2$.

b) $f(x) = 6x + 3$.

c) $f(x) = 0,5x + 0,5$.

d) $f(x) = 0,5x + 1$.

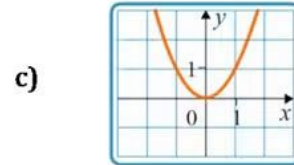
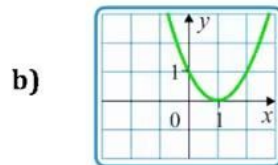
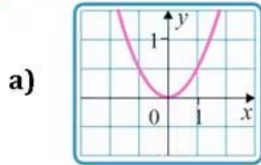
B 15

Fonction carré

Pour chaque question, il y a une ou plusieurs bonnes réponses.

1

La courbe correspondant à la fonction définie par $f(x) = x^2$ est :



2

Le cours de mathématique affirme que :

- a) la fonction $x \mapsto x^2$ est croissante sur $\mathbb{R}$.
- b) il existe un intervalle sur lequel la fonction $x \mapsto x^2$ est décroissante.
- c) pour tous nombres réels négatifs a et b , si $a \leq b$, alors $a^2 \geq b^2$.
- d) pour tous nombres réels a et b , si $a \leq b$, alors $a^2 \leq b^2$.

3

Les propriétés de la fonction carré permettent de conclure sans calculatrice que :

- a) $99^2 \geq 100^2$
- b) $10\,001^2 \geq 10\,002^2$
- c) $(-5,34567)^2 \geq (-5,34566)^2$
- d) $-1,9^2 \geq -2,1^2$

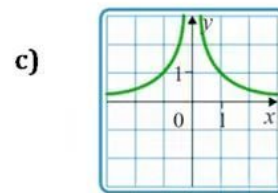
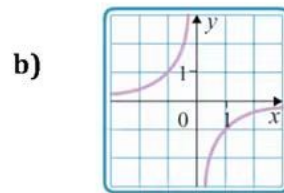
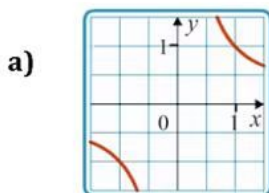
C 15

Fonction inverse

Pour chaque question, il y a une ou plusieurs bonnes réponses

1

La courbe correspondant à la fonction définie par $f(x) = \frac{1}{x}$ est :





Le cours de mathématique affirme que :

- a) la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est décroissante sur $\mathbb{R}^+$.
- b) il existe un intervalle sur lequel la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est croissante.
- c) pour tous nombres réels strictement positifs a et b , si $a \leq b$, alors $\frac{1}{a} \geq \frac{1}{b}$.
- d) pour tous nombres réels non nuls a et b , si $a \leq b$, alors $\frac{1}{a} \geq \frac{1}{b}$.



Les propriétés de la fonction inverse permettent de conclure sans calculatrice que :

- a) $\frac{1}{3} \leq \frac{1}{4}$.
- b) $-\frac{1}{30} \leq -\frac{1}{40}$.
- c) $\frac{1}{\pi} \leq \frac{1}{3,14}$.
- d) $\frac{1}{10^5} \leq \frac{1}{10^6}$.



Fonction du second degré

Vrai-faux avec justification

Soit $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$)

- a) Si, pour tout réel x , $f(x) < 0$, alors $\Delta < 0$.
- b) Si Δ est négatif, alors, pour tout réel x , $f(x) < 0$.
- c) S'il existe deux réels α et β tels que $f(\alpha)f(\beta) < 0$, alors $\Delta < 0$.
- d) Si l'équation $f(x) = 0$ admet deux racines distinctes x' et x'' et si α et β sont deux réels tels que :
 $x' < \alpha < x'' < \beta$, alors $f(\alpha)f(\beta) < 0$.
- e) Si $a < 0$, alors l'équation $f(x) = 0$, a deux racines distinctes de signes contraires.
- f) Si $b = 0$, alors l'équation $f(x) = 0$ a deux racines opposées.
- g) Si $a + b + c = 0$, alors $f(x) = (ax - c)(x - 1)$.

Découvrir

Activité 3

20

Racines d'un polynôme

1°) Dans le plan muni d'un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$, représenter les courbes C et C' d'équations

respectives $y = \frac{1}{x-2}$ et $y = x^2 - 2x$.

2°) Déterminer graphiquement le nombre de points d'intersection de C et C'.

3°) a) Montrer que : $x^2 - 2x = \frac{1}{x-2}$ si et seulement si $x^3 - 4x^2 + 4x - 1 = 0$.

b) En déduire le nombre de racines du polynôme P défini par $P(x) = x^3 - 4x^2 + 4x - 1$.

4°) a) Vérifier que 1 est une racine de P.

b) En déduire les autres racines de P.

Activité 4

3

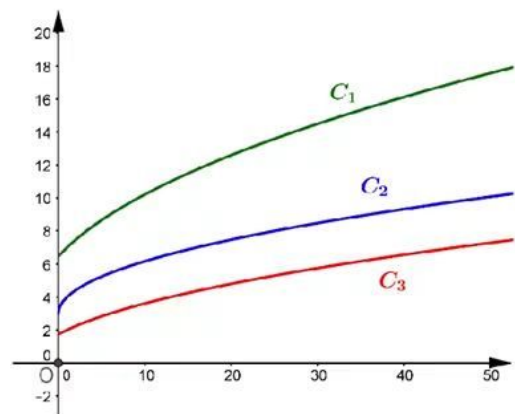
Lecture graphique

On a représenté dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$,

les courbes des fonctions f, g et h définies sur $[0, +\infty[$

par : $f : x \mapsto \sqrt{x+3}$; $g : x \mapsto \sqrt{x}+3$; $h : x \mapsto 2\sqrt{x+3}+3$.

Identifier chacune d'entre elles.



Activité 5

20

Restriction d'une fonction

1

Le plan est muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1°) Représenter la parabole $\mathcal{P}$, représentative de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 6x + 5$.

2°) On désigne par $\mathcal{P}'$ les points de $\mathcal{P}$ d'abscisses appartenant à l'intervalle $[-3, 0]$, et par g la

fonction dont la représentation graphique est la courbe $\mathcal{P}'$.

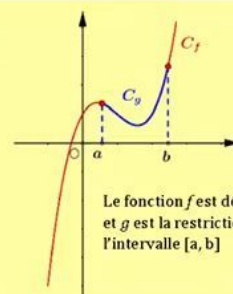
Colorier $\mathcal{P}'$ et donner l'expression de g .

Définition

Soit f une fonction définie sur un ensemble E et C_f sa représentation graphique dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Soit D une partie de E . On appelle restriction de la fonction f à D , la fonction g définie sur D par $f(x) = g(x)$, pour tout $x \in D$.

La représentation graphique de g est l'ensemble des points de C_f ayant pour coordonnées $(x, f(x))$ où $x \in D$. On note $g = f|_D$.



Le fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ et g est la restriction de f à l'intervalle $[a, b]$



On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2|x-2| - |x-3| - x^2$.

- 1°) Donner l'expression de la fonction g , restriction de f à l'intervalle $[3, +\infty[$.
- 2°) Représenter graphiquement g .



Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

- 1°) Représenter l'hyperbole $\mathcal{H}$ d'équation $y = \frac{2}{x}$.
- 2°) Pour tout $x > 0$, on désigne par A le point de $(O, \vec{i})$ d'abscisse x .
 - a) Montrer qu'il existe un unique point M d'ordonnée positive, tel que le triangle OAM soit rectangle en A et d'aire égale à 1.
 - b) Sur quelle courbe varie le point M lorsque A varie ?
- 3°) On désigne par g la fonction qui à x associe l'ordonnée de M .
Pour quelles valeurs de x , a-t-on $2 \leq g(x) \leq 10$?
- 4°) Soit $B(0, g(x))$.
Existe-t-il une valeur de x pour laquelle le périmètre du rectangle $OAMB$ est égal à 2.

Activité 6



Sens de variation d'une fonction

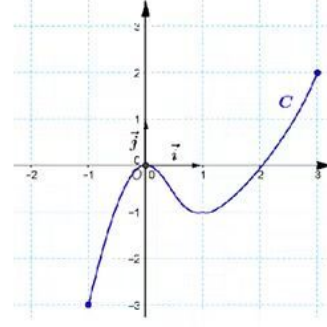
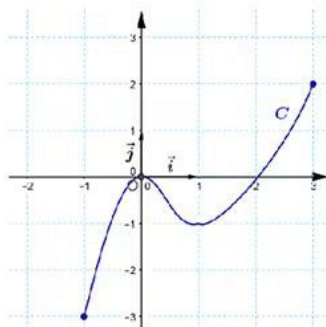
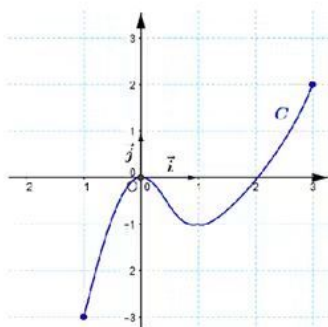


Le plan est muni d'un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

La courbe C tracée ci-dessous, est la représentation graphique d'une fonction f définie sur $[-1, 3]$.

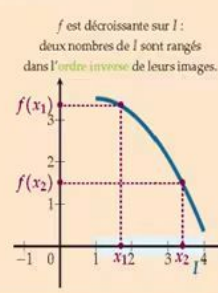
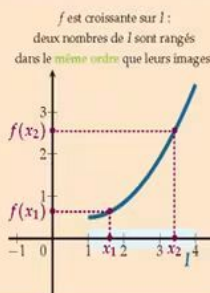
- 1°) Lire graphiquement les variations de la fonction f .
- 2°) Construire les courbes représentatives des fonctions $g : x \mapsto -f(x)$; $h : x \mapsto |f(x)|$;
 $k : x \mapsto \frac{1}{2} f(x)$. Expliquer le procédé de construction.

- 3°) Lire graphiquement les variations de chacune des fonctions g , h et k .



Soit f une fonction définie sur I une partie non vide de $\mathbb{R}$, et x_1 et x_2 deux réels de I .

- Si $x_1 \leq x_2$ implique $f(x_1) \leq f(x_2)$ alors f est dite **croissante** sur I .
- Si $x_1 \leq x_2$ implique $f(x_1) \geq f(x_2)$ alors f est dite **décroissante** sur I .





Soit f une fonction définie sur I une partie non vide de $\mathbb{R}$.

Montrer que :

- a) f est croissante sur I signifie que $b-a$ et $f(b)-f(a)$ ont le même signe pour tous réels a et b distincts de I
- b) f est décroissante sur I signifie que $b-a$ et $f(b)-f(a)$ ont de signe contraire pour tous réels a et b distincts de I

Définition

Soient a et b deux réels de I .

- Le réel $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ s'appelle le taux d'accroissement de f entre a et b .
- f est croissante sur I si et seulement si pour tous réels a et b distincts de I , $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \geq 0$.
- f est décroissante sur I si et seulement si pour tous réels a et b distincts de I , $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \leq 0$.
- f est constante sur I si et seulement si pour tous réels a et b distincts de I , $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0$.



Soit f la fonction à variable réelles définie par : $f(x) = x^2 - 2x + 5$.

- a) Soit a et b deux réels distincts. Vérifier que : $f(b) - f(a) = b^2 - a^2 - 2(b-a)$.
- b) Montrer que $\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = b+a-2$.
- c) En déduire que f est croissante sur $[1, +\infty[$ et décroissante sur $]-\infty, 1]$.

Activité 7

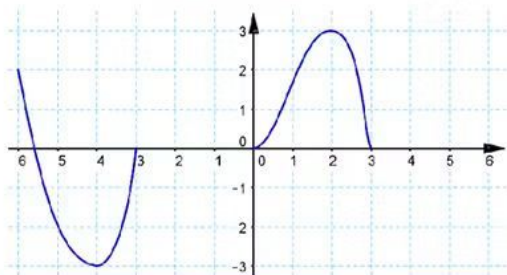


Fonctions paires- Fonctions impaires



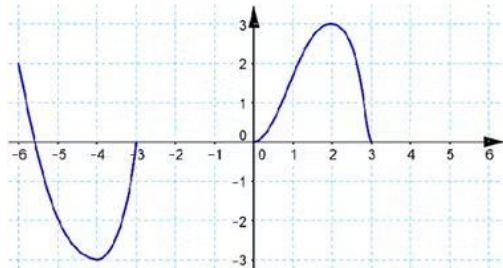
Une fonction f est définie sur $[-6 ; 6]$. Une partie de sa représentation graphique est donnée. Compléter la représentation graphique dans les cas suivants :

a) f est paire.



Le plan est muni d'un repère orthogonal (O, i, j) .
Soit f une fonction définie sur un ensemble D .
On dit que f est **une fonction paire** si pour tout $x \in D$, $-x \in D$ et $f(-x) = f(x)$.
La fonction f est paire si, et seulement si, sa courbe représentative est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

b) f est impaire.



Le plan est muni d'un repère orthogonal (O, i, j) .
Soit f une fonction définie sur un ensemble D .
On dit que f est **une fonction impaire** si pour tout $x \in D$, $-x \in D$ et $f(-x) = -f(x)$.
La fonction f est impaire si, et seulement si, sa courbe représentative est symétrique par l'origine du repère.



Une fonction f est définie sur $[-5 ; 5]$. Une partie de son tableau de variation est donnée ci-dessous.

x	0	1	3	5
$f(x)$	0	2	1	3

Recopier et compléter le tableau dans les cas suivants :

a) f est paire.

b) f est impaire.



Le plan est muni d'un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Soit g une fonction impaire définie sur $[-2, 2]$.

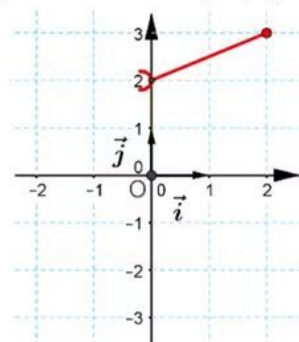
On a représenté ci-contre, l'ensemble : $\{M(x, g(x)) \text{ tels que } 0 < x \leq 2\}$.

1°) Acheter le tracé de la courbe représentative de g .

dans la figure ci-contre

2°) Quelle est l'image de 0 par g ?

3°) Donner l'expression de $g(x)$ pour tout $x \in [-2, 2]$.



Activité 8

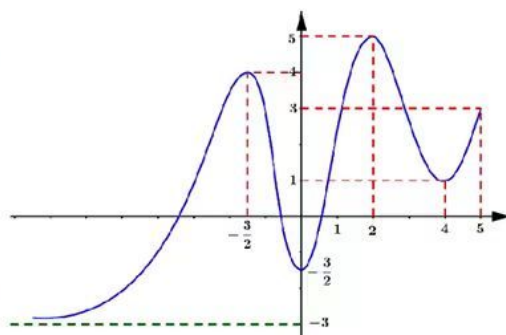


Majorant-Minorant



On a représenté dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, ci-dessous, la courbe représentative d'une fonction f définie sur $]-\infty, 5]$. Répondre par **vrai ou faux**.

Soit f une fonction définie sur un ensemble D .
S'il existe x_0 appartenant à D tel que pour tout x de D , $f(x_0) \leq f(x)$, on dit que la fonction f admet sur D un **minimum** en x_0 .



Soit f une fonction définie sur un ensemble D .
S'il existe x_0 appartenant à D tel que pour tout x de D , $f(x) \leq f(x_0)$, on dit que la fonction f admet sur D un **maximum** en x_0 .

1°) La fonction f admet un maximum en $-\frac{3}{2}$ sur $]-\infty, 5]$.

2°) La restriction de f à $]-\infty, 0]$ admet un maximum en $-\frac{3}{2}$.

3°) La fonction f admet un maximum en 2 sur $]-\infty, 5]$.

4°) Le réel -3 est un minimum de la fonction f sur $]-\infty, 5]$.

5°) La restriction de f à $]-2, 2]$ admet un minimum en 0.

6°) Pour tout $x \in]-\infty, 5]$, $f(x) \leq 4$.

7°) Pour tout $x \in]-\infty, 5]$, $f(x) \leq 10$.

8°) Pour tout $x \in]-\infty, 5]$, $-3 \leq f(x)$.

9°) Pour tout $x \in]-\infty, 5]$, $-6 \leq f(x)$.

10°) Pour tout $x \in]-\infty, 5]$, $|f(x)| \leq 5$.

Définition Soit f une fonction définie sur un ensemble D .

→ La fonction f est majorée sur D s'il existe un réel M tel que pour tout x de D , $f(x) \leq M$.

→ La fonction f est minorée sur D s'il existe un réel m tel que pour tout $x \in D$, $m \leq f(x)$.

→ La fonction f est dite bornée sur D s'il existe deux réels m et M tel que pour tout $x \in D$, $m \leq f(x) \leq M$.

2 Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ et f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$f(x) = \frac{x+1}{|x|+1}$. Montrer que tous les points de la courbe C_f de f se trouvent dans la région du plan délimitée par les droites $y = -1$ et $y = 1$.

3 1°) Majorer et minorer sur $\mathbb{R}$ la fonction

$$x \mapsto \frac{x^2}{x^2+1}.$$

2°) a) Montrer que pour tout réel x ,

$$|2x| \leq x^2 + 1.$$

b) Majorer et minorer sur $\mathbb{R}$ la fonction

$$x \mapsto \frac{x^2 - 2x}{x^2 + 1}.$$

Activité 9

25

Fonction affine par intervalle

1 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x + 3 - |2x - 2|$

1°) a) Montrer que : $f(x) = \begin{cases} -x + 5 & \text{si } x \in [1, +\infty[\\ 3x + 1 & \text{si } x \in]-\infty, 1] \end{cases}$.

b) Montrer que f est décroissante sur $[1, +\infty[$ et croissante sur $] -\infty, 1]$.

Résumer les variations de f dans un tableau.

c) Que représente 4 pour f ?

2°) a) Tracer la courbe représentative C_f de f dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

b) Soit m un réel donné. Déterminer, suivant les valeurs de m , le nombre de solutions de l'équation $f(x) = m$.

Commentaire

La fonction f est une fonction affine par intervalles.

Définition

La fonction f est **une fonction affine par intervalles** si son domaine de définition est une réunion d'intervalles sur chacun des quels $f(x)$ est de la forme $ax + b$.

Conséquence

f est une fonction affine par intervalles signifie la courbe représentative de f est une réunion de demi-droites ou de segments de droite.

- 2** Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, les points $A(0, 4)$, $B(3, 0)$, $C(-3, 0)$ sont fixes et M un point variable de la droite (BC) d'abscisse x .
On désigne par H le projeté orthogonal de M sur la droite (AB) et par K le projeté orthogonal de M sur la droite (AC) .
- 1°) On considère la fonction $f : x \mapsto MH + MK$
Donner l'expression de $f(x)$ pour tout réel x .
 - 2°) Montrer que la restriction de f à l'intervalle $[-3, 3]$ est une fonction constante.
 - 3°) Déterminer les valeurs de x pour lesquelles $MH + MK = 6$.
 - 4°) Existe-t-il des points M tels que $MH = MK$?

La distance d'un point $P(x_1, y_1)$ et la droite Δ d'équation $ax + by + c = 0$ est

$$d(P, \Delta) = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Activité 10

15

Fonction partie entière

- 1** 1°) Pour chacun des réels suivants donner un encadrement entre deux entiers successifs.
 $-1,2$; $-1,99999999$; $\frac{56}{49}$; $-\sqrt{2}$; $5\sqrt{13}$; π ; -2π .
- 2°) Déterminer le plus grand entier inférieur ou égal à chacun des réels :
 5 ; $5,1$; $-5,000002$; $\sqrt{26}$; $-\frac{76}{15}$; $4 + \sqrt{3}$.

Définition

Tout réel peut être encadré par deux entiers consécutifs : si x est un réel alors il existe un unique entier relatif n tel que : $n \leq x < n+1$, Où n est un entier relatif ; n est alors appelé **partie entière de x** et noté $E(x)$.

- 2** 1°) Déterminer la partie entière des réels suivants :
- a) 3,7 b) -7,4 c) 0,14 d) $-\frac{17}{3}$

2°) a) Démontrer que, pour tout réel x , $x - 1 < E(x) \leq x$.

b) Démontrer que, pour tout réel x , $E(x+1) = E(x) + 1$.

3°) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = E(x)$.

a) Etudier la parité et le sens de variation de la fonction f .

b) Tracer la courbe de la fonction partie entière sur $[-2, 2]$.

4°) Résoudre les équations suivantes : a) $E(x) = 4$. ; b) $E(x) = -3$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$E(x) \leq x < E(x) + 1$$

Activité 11**25****La fonction $x \mapsto \sqrt{f(x)}$** **1**

Donner l'ensemble de définition de chacune des fonctions suivantes.

$$f : x \mapsto \sqrt{x^2 - 1} \quad ; \quad g : x \mapsto \sqrt{\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} + 2} \quad ; \quad h : x \mapsto \sqrt{\frac{1}{x-1}} \quad ; \quad k : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{|x-1|}} .$$

2**1°)** Soit f une fonction définie et positive sur un intervalle I .**a)** Montrer que :Si f est croissante sur I alors $\sqrt{f}$ est croissante sur I .Si f est décroissante sur I alors $\sqrt{f}$ est décroissante sur I .**b)** Montrer que :Si f est majorée sur I alors $\sqrt{f}$ est majorée sur I .**2°) a)** Préciser l'ensemble de définition de chacune des fonctions suivantes.

$$m : x \mapsto \sqrt{x-3} \quad ; \quad h : x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x^2+1}} \quad ; \quad k : x \mapsto \sqrt{x(1-x)} .$$

b) Etudier les variations de chacune des fonctions m , h et k .**Théorème**Soit f une fonction définie et positive sur un intervalle I .➔ Si f est décroissante sur I alors $\sqrt{f}$ est décroissante sur I .➔ Si f est majorée sur I alors $\sqrt{f}$ est majorée sur I .➔ Si f est majorée sur I alors $\sqrt{f}$ est majorée sur I .**Activité 12****15****Opérations sur les fonctions**Soient f et g deux fonctions définies sur une même partie $\mathcal{D}$ de l'ensemble $\mathbb{R}$. On définit sur la partie $\mathcal{D}$ les fonctions suivantes :**1°)** La fonction **somme** de f et g , notée $f + g$. Elle est définie par :

$$\begin{array}{l} \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto f(x) + g(x) \end{array} \quad \text{Donc} \quad \left[\begin{array}{l} \text{Pour tout } x \text{ appartenant à } \mathcal{D} : \\ (f + g)(x) = f(x) + g(x) \end{array} \right.$$

2°) La fonction **produit** de f et g , notée $f \times g$. Elle est définie par :

$$\begin{array}{l} \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto f(x) \times g(x) \end{array} \quad \text{Donc} \quad \left[\begin{array}{l} \text{Pour tout } x \text{ appartenant à } \mathcal{D} : \\ (f \times g)(x) = f(x) \times g(x) \end{array} \right.$$

3°) La fonction **produit de f par le réel α** , notée αf . Elle est définie par :

$$\begin{array}{l} \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \alpha f(x) \end{array} \quad \text{Donc} \quad \left[\begin{array}{l} \text{Pour tout } x \text{ appartenant à } \mathcal{D} : \\ (\alpha f)(x) = \alpha \times f(x) \end{array} \right.$$

4°) La fonction **valeur absolue** de f est notée $|f|$. Elle est définie par :

$$\begin{array}{l} \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto |f(x)| \end{array} \quad \text{Donc} \quad \left[\begin{array}{l} \text{Pour tout } x \text{ appartenant à } \mathcal{D} : \\ |f|(x) = |f(x)| \end{array} \right.$$

5°) On suppose que la fonction f ne s'annule pas sur $\mathcal{D}$

La fonction **inverse** de f , notée $\frac{1}{f}$. Elle est définie par :

$$\begin{array}{l} \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{1}{f(x)} \end{array} \quad \text{Donc} \quad \left[\begin{array}{l} \text{Pour tout } x \text{ appartenant à } \mathcal{D} : \\ \frac{1}{f}(x) = \frac{1}{f(x)} \end{array} \right.$$

6°) On suppose que la fonction g ne s'annule pas sur $\mathcal{D}$

La fonction **quotient** de f par g est notée $\frac{f}{g}$. Elle est définie par :

$$\begin{array}{l} \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{f(x)}{g(x)} \end{array} \quad \text{Donc} \quad \left[\begin{array}{l} \text{Pour tout } x \text{ appartenant à } \mathcal{D} : \\ \frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \end{array} \right.$$

7°) On suppose que f est **positive** sur $\mathcal{D}$: Pour x appartenant à $\mathcal{D}$, $f(x) \geq 0$

La fonction **racine carrée** de f est notée $\sqrt{f}$. Elle est définie par :

$$\begin{array}{l} \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \sqrt{f(x)} \end{array} \quad \text{Donc} \quad \left[\begin{array}{l} \text{Pour tout } x \text{ appartenant à } \mathcal{D} : \\ \sqrt{f}(x) = \sqrt{f(x)} \end{array} \right.$$



1°) Soit les fonctions f, g et h définies pour tout réel x par $f(x) = (x-1)^2 - 2$; $g(x) = x - 1$

et $h(x) = 2|x-2| - |x+3|$.

Donner les expressions des fonctions $f+h$; fg ; h^2 ; $2f+3g^3$.

2°) a) Résoudre dans $\mathbb{R}$, les équations $f(x) = 0$; $g(x) = 0$ et $h(x) = 0$.

b) Donner l'ensemble de définition des fonctions :

$$x \mapsto \frac{1}{f(x)} ; \quad x \mapsto \frac{1}{h(x)} ; \quad x \mapsto \frac{1}{h^2(x)} ; \quad x \mapsto \frac{f(x)}{g(x)} ; \quad x \mapsto \frac{h(x)}{g(x)}.$$



1°) Montrer que si f et g sont croissantes, alors $f+g$ est croissante.

2°) Montrer que si f et g sont décroissantes, alors $f+g$ est décroissante.

3°) Donner les variations de

$$f : x \mapsto -x + 5 + \frac{1}{x} \text{ sur } [0, +\infty[.$$

$$g : x \mapsto x^2 - 1 + \sqrt{x+3} \text{ sur } [1, +\infty[.$$

Exercices d'applications



QCM

Cocher la bonne réponse

1°) La fonction f définie sur $[-1, +\infty[$ par $f(x) = \frac{3x}{1+|x|}$

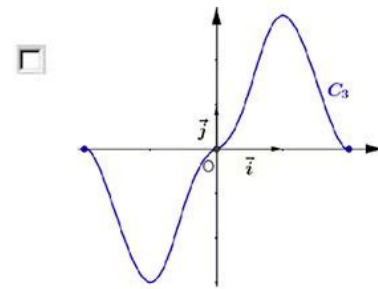
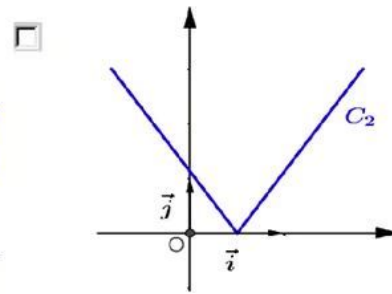
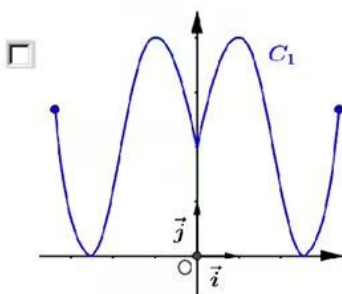
☐ est paire

☐ est impaire

☐ n'est ni paire, ni impaire.

2°) Le plan est muni d'un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Une parmi les courbes ci-dessous n'est ni la représentation graphique d'une fonction paire ni d'une fonction impaire. Laquelle ?



3°) La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{2}{x^2+4}$.

☐ n'est pas majorée sur $\mathbb{R}$

☐ n'est pas minorée sur $\mathbb{R}$

☐ est bornée sur $\mathbb{R}$.

4°) la fonction $x \mapsto \sqrt{4-2x}$ est définie sur

☐ $]-\infty, 2]$

☐ $[2, +\infty[$

☐ $\mathbb{R}$.

5°) La fonction $x \mapsto \frac{2x^3-1}{1-|x|}$ est définie sur

☐ $\mathbb{R} \setminus \{1\}$

☐ $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$

☐ $\mathbb{R} \setminus \{1, -1\}$.



Vrai- Faux

Répondre par vrai ou faux en justifiant la réponse.

1°) Si f est une fonction paire définie sur $\mathbb{R}$, alors $f(0) = 0$.

2°) Si f est minorée sur D_f , alors f admet un minimum sur D_f .

3°) Si f est majorée sur D_f , alors f admet un maximum sur D_f .

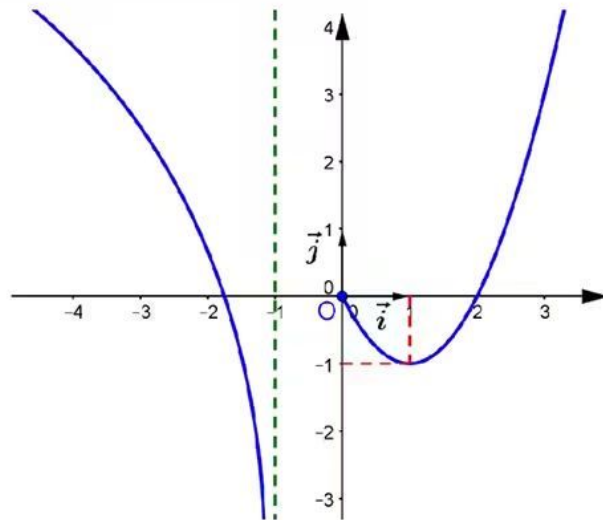
4°) Si f admet un minimum et un maximum sur D_f , alors f est bornée sur D_f .

5°) Soit f une fonction définie sur un ensemble E et D une partie de E .

Si la restriction de f à D est bornée sur D , alors f est bornée sur E .



On donne ci-dessous la courbe d'une fonction f .



1°) Pour chacune des questions suivantes une et une seule réponse est exacte. **Cocher la bonne réponse.**

a) La fonction f est définie sur :

- ☐ $\mathbb{R}$
☐ $]-\infty, -1[\cup]0, +\infty[$
☐ $\mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}$

b) L'équation $f(x) = 0$ admet :

- ☐ une solution
 ☐ deux solutions
 ☐ trois solutions

c) L'image de l'intervalle $[0, +\infty[$ par la fonction f est :

- ☐ $\mathbb{R}$
☐ $]-\infty, 0]$
☐ $[-1, +\infty[$

d) Sur l'intervalle $[0, +\infty[$ la fonction f est :

- ☐ bornée
 ☐ minorée
 ☐ ni majorée ni minorée

2°) a) Dresser le tableau de variation de la fonction f .

b) Discuter graphiquement, suivant les valeurs du paramètre réel m le nombre de solution de l'équation $f(x) = m$

3°) Soit la fonction g définie par $g(x) = f(|x|)$

a) Etudier la parité de g .

b) Tracer C_g la courbe représentative de la fonction g .



1°) Soit la fonction f définie par : $f(x) = x - 1 + \sqrt{x^2 - 2x + 3}$.
Montrer que f est minorée par 0.

2°) Soit la fonction g définie par : $g(x) = \frac{x|x|}{|x| - 1}$.

a) Préciser le domaine de g .

b) Etudier la parité de g .

c) Montrer que pour tout $x \in]1, +\infty[$ on a : $g(x) - 4 = \frac{(x-2)^2}{x-1}$.

En déduire que g admet un minimum sur $]1, +\infty[$ que l'on précisera.



Soit la fonction f définie par : $f(x) = \frac{2x}{x^2 + |x| + 1}$.

1°) Préciser le domaine de f et étudier la parité de f .

2°) Montrer que f est majorée par 2.

3°) En déduire que f est borné sur $\mathbb{R}$.

4°) Soit g la restriction de f sur $\mathbb{R}_+$.

a) Donner le minimum de g

b) Le réel 2 est un maximum pour la fonction g ?

c) Etudier le signe de $g(x) - \frac{2}{3}$, en déduire le maximum de g .



I - Soit f la fonction définie par : $x^2 + 2x - 3$.

On désigne par $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1°) Donner la forme canonique de f .

2°) Déterminer les variations de f sur $[-1, +\infty[$ et $]-\infty, -1]$.

3°) Préciser par quelle transformation géométrique obtient-on la courbe $\mathcal{C}_f$ à partir de la courbe d'équation $y = x^2$ et tracer la courbe de f .

II - Soit la fonction $g(x) = \frac{-4x + 4}{x + 1}$.

1°) Déterminer les réels a , b et c tels que : $g(x) = \frac{a}{x+b} + c$ pour tout $x \in Dg$.

2°) Déterminer les variations de g .

3°) Tracer la courbe de g dans le même repère que $\mathcal{C}_f$.

III - 1°) Déterminer graphiquement le nombre des solutions de l'équation $g(x) = f(x)$ puis déterminer la position de $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.

2°) Déterminer alors le signe de $\frac{-x^3 - 3x^2 - 3x + 7}{x + 1}$.



Soit f la fonction définie par $f(x) = \sqrt{x-3} - 1$ et on désigne par $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé

- 1°) Déterminer les variations de f .
- 2°) Préciser par quelle transformation géométrique on obtient la courbe de f à partir de la courbe d'équation $y = \sqrt{x}$ puis tracer $\mathcal{C}_f$.
- 3°) Soit $h(x) = \frac{-x+4}{\sqrt{x-3}+1}$ déduire la courbe de h .
- 4°) Minorer sur $[3, +\infty[$, la fonction f . En déduire une majorant de $h(x)$.



1°) Soit f définie par $f(x) = \frac{x^2-1}{x}$.

- a) Étudier la parité de f .
- b) Montrer que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.
- c) Résoudre $f(x) = 0$.

2°) On considère $g(x) = \frac{x^4+1}{x^2}$.

- a) Étudier la parité de g .
- b) Montrer que $g(x) = f^2(x) + 2$.
- c) En déduire le sens de variation de g .
- d) Montrer que 2 est minimum de g .
- e) Dresser le tableau de variation de g .



Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par pour tout x réel on a :

$$f(-x) + 3f(x) = 4x^3 + 2x.$$

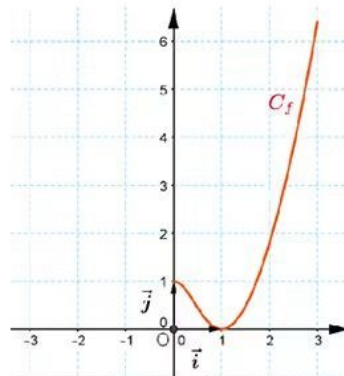
- 1°) Montrer que f est fonction impaire.
- 2°) Expliciter $f(x)$.
- 3°) Étudier le sens de variation de la fonction $x \mapsto 2x^3$, en déduire le sens de variation de f .
- 4°) On pose $g(x) = \frac{1}{\sqrt{f(x)}}$.
 - a) Déterminer le domaine de g .
 - b) Montrer que g est bornée sur $[1, +\infty[$.



On considère la fonction f définie par $f(x) = \frac{(1-x^2)^2}{1+x^2}$.

- 1°) Déterminer son ensemble de définition.
- 2°) Minorer f sur $\mathbb{R}$.
- 3°) Étudier la parité de la fonction f .

4°) Compléter la représentation graphique C_f de f sur l'intervalle $[-3,3]$.



5°) Donner par lecture graphique la valeur du maximum de la fonction f sur :

- a) l'intervalle $[-1,1]$.
- b) l'intervalle $[-2,1]$.

6°) Résoudre l'inéquation $f(x) \leq 1$.



Soit la fonction f définie par : $f(x) = x^3 - 3x$.

1°) Montrer que f est impaire.

2°) a) Soient a et b deux réels distincts, montrer que : $\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = b^2 + ab + a^2 - 3$.

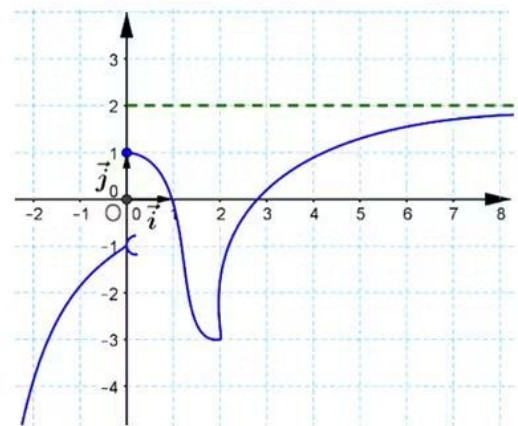
b) En déduire que f est croissante sur chacun des intervalles $]-\infty, 1]$ et $[1, +\infty[$, et qu'elle est décroissante sur l'intervalle $[-1, 1]$.



On donne ci-dessous la courbe d'une fonction f .

Répondre par « Vrai » ou « Faux »

- a) La fonction f est définie sur $\mathbb{R}'$.
- b) La fonction f admet un maximum absolu égale à 2.
- c) L'équation $f(x) = -1$ admet dans $\mathbb{R}$ trois solutions.
- d) La restriction de la fonction f à l'intervalle $[0, +\infty[$ est bornée.



13

5



Vrai- Faux

Soient les fonctions f et g telles que $f(x) = \frac{3x}{4-x^2}$ et $g(x) = \frac{3|x|}{4-x^2}$

Répondre par **vrai** ou **faux** en justifiant la réponse

- 1°) $\mathcal{D}_f = \mathcal{D}_g = \mathbb{R} \setminus \{2; -2\}$.
- 2°) f est impaire.
- 3°) g est impaire.
- 4°) $f + g$ est paire.
- 5°) $f \times g$ n'est ni paire ni impaire.

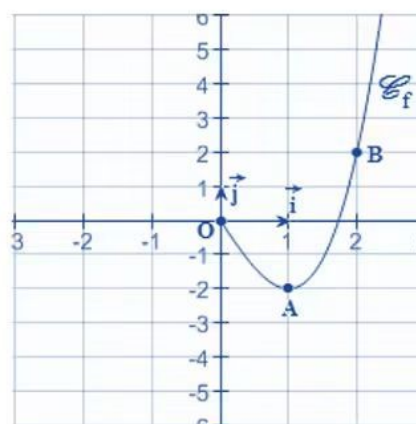
14

15



Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et soit $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère cartésien $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On donne dans la figure ci-contre la branche de $\mathcal{C}_f$ sur $[0, +\infty[$.

- 1°) Compléter le tracé de la courbe $\mathcal{C}_f$ sachant que f est impaire puis déterminer graphiquement les variations de f et dresser son tableau de variation.
- 2°) Exprimer $f(x)$ en fonction de x sachant que f est une fonction polynôme de troisième degré et que sa courbe passe par les points O, A et B.
- 3°) Déterminer par leurs coordonnées les points d'intersection de la courbe $\mathcal{C}_f$ et l'axe des abscisses.



15

10



On considère la fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que : $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$.

- 1°) Préciser le domaine de définition de f , puis montrer qu'elle est paire.
- 2°) Montrer que f est majorée par 1. Le nombre 1 est-il un maximum de f ? justifier votre réponse.
- 3°) Montrer que f est minorée par -1. Le nombre -1 est-il un minimum de f ? justifier votre réponse.

16

15



On considère deux fonctions f et g définies sur un ensemble E .

On suppose que pour tout nombre x appartenant à E , $-x$ appartient aussi à E .

- 1°) Montrer que si f et g sont paires alors $f + g$ et $f \times g$ sont paires
- 2°) Montrer que si f et g sont impaires alors $f + g$ est impaire et $f \times g$ est paire.
- 3°) Montrer que si f est paire et g est impaire alors $f \times g$ est impaire.
- 4°) On suppose que f est impaire. Etudier suivant l'entier naturel non nul n , la parité de la fonction f^n .