

Série produit scalaire dans le plan

Exercice 1

Soient $A(3 ; 6)$; $B(-1 ; -2)$ et $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}$

- 1) Déterminer m pour que les vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{u}$ soient :
 - a) orthogonaux
 - b) colinéaires
- 2) Pour $m = -3$
 - a) Calculer $\vec{u} \cdot \vec{AB}$.
 - b) En déduire une valeur de $\cos(\vec{u}, \vec{AB})$.
- 3) Déterminer une équation cartésienne de la droite orthogonale à (AB) et passant par A .

Exercice 2

On donne les points A et B tel que $AB = 3$

- 1) Soit G le barycentre des points pondérés $\{A ; 1\}$ et $\{B ; 4\}$
Déterminer GA^2 et GB^2 .
- 2) Soit $E = \{M \text{ appartient à } \mathcal{P} / MA^2 - 4MB^2 = 6\}$ déterminer et construire l'ensemble E .

Exercice 3

Soit ABC un triangle tel que $AB = AC = 5$ et $BC = 6$ et soit $I = A^*B$

- 1) Calculer AI
- 2) Montrer que $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 7$.
- 3) Déterminer l'ensemble $E = \{M \text{ appartient à } \mathcal{P} / MA^2 - 3MI^2 = 44\}$.
- 4) Soit G le centre de gravité de ABC .

On pose $f : \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{R}$; $M \mapsto f(M)$ tel que $f(M) = \vec{MB} \cdot \vec{MC} - \frac{2}{3} \vec{AI} \cdot \vec{MG}$.

- a) Calculer $f(A)$ et $f(C)$.
- b) Montrer que pour tout point M du plan on a $f(M) = MG^2 + f(G)$.
- c) Déterminer suivant le réel a l'ensemble $F_a = \{M \text{ appartient à } \mathcal{P} / f(M) = a\}$.

Exercice 4

- 1) Soient A et B deux points distincts et $I = A*B$.
 - a) Construire un point C tel que le triangle AIC soit rectangle et isocèle en I.
 - b) Montrer que $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = -\frac{AI^2}{2}$.
- 3) Déterminer puis construire l'ensemble $E = \{M \text{ appartient à } \mathcal{P} / \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = \frac{AB^2}{8}\}$.

Exercice 5

Soit ABC un triangle équilatéral direct de côté $a > 0$. Soit D le point vérifiant $2\overrightarrow{DA} - 2\overrightarrow{DB} - \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{0}$.

- 1) Calculer $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$ en fonction de a.
- 2) Montrer que (AB) est parallèle à (DC).
- 3) Calculer $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BD}$. En déduire une construction de D.
- 4) Soit $f: \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{R}$; $M \mapsto f(M)$ tel que $f(M) = 2MA^2 - 2MB^2 - MC^2$.
 - a) Vérifier que $f(C) = 0$.
 - b) Exprimer $f(M)$ en fonction de MD et a.
 - c) En déduire l'ensemble F des points M tels que $f(M) = 0$.
- 5) Soit $g: \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{R}$; $M \mapsto g(M)$ tel que $g(M) = 2\overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{DB} + a^2$. Déterminer l'ensemble G des points M tels que $g(M) = a^2$.
- 6) Soit I le point d'intersection de F et G autre que C. Montrer que CDI est triangle équilatéral.

Exercice n° 1:

Soit ABC un triangle tel que $AB=2$; $AC=6$ et $BAC = \frac{2\pi}{3}$. Soit H le projeté orthogonal de C sur (AB) et I le milieu de $[BC]$.

- 1) a) calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ en déduire AH .
- b) calculer CH et en déduire BC .
- 2) calculer $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$ et en déduire $\cos ABC$.
- 3) déterminer et construire l'ensemble des points M du plan tel que $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AB} = -4$.
- 4) a) montrer que $AB^2 + AC^2 = 2AI^2 + \frac{BC^2}{2}$; en déduire AI .
- b) montrer que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = IM^2 - IA^2$.
- c) en déduire l'ensemble des points M du plan tel que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 4$.

Exercice n° 2:

$ABCD$ un trapèze rectangle en C et D . E est un point de $[DC]$ défini comme l'indique la figure ci-dessous :
($AD = 3$; $DE = 1$; $BC = 4$)

1°) a) Montrer que : $(\overrightarrow{ED} + \overrightarrow{DA}) \cdot (\overrightarrow{EC} + \overrightarrow{CB}) = \overrightarrow{ED} \cdot \overrightarrow{EC} + \overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{CB}$

b) En déduire que : $\overrightarrow{EA} \cdot \overrightarrow{EB} = 9$.

c) Calculer $\cos(AEB)$.

d) Montrer alors que $AB = \sqrt{17}$.

2°) Soit H le projeté orthogonal de A sur (BC) .

a) Calculer $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}$ et $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CE}$.

b) En déduire que (CA) et (BE) sont perpendiculaires.

3°) On considère l'ensemble $\Delta = \{M \in P \text{ tel que } MB^2 + MC^2 - 2\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} = 29\}$

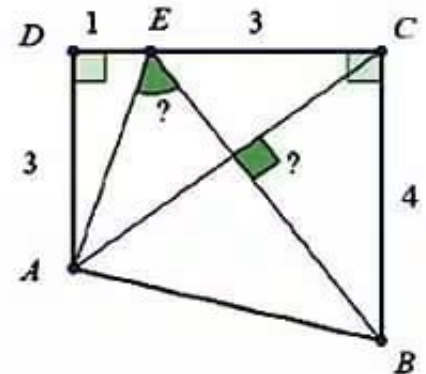
Soit $I = B \cdot C$ et $J = A \cdot C$.

a) Montrer que $BJ^2 = \frac{41}{4}$ puis vérifier que $J \in \Delta$.

b) Montrer que pour tout point $M \in P$ on a : $MB^2 + MC^2 - 2\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} = 2(MI^2 - MJ^2) + \frac{41}{2}$.

c) Montrer que : $MI^2 - MJ^2 = 2\overrightarrow{MJ} \cdot \overrightarrow{JI} + \frac{17}{4}$.

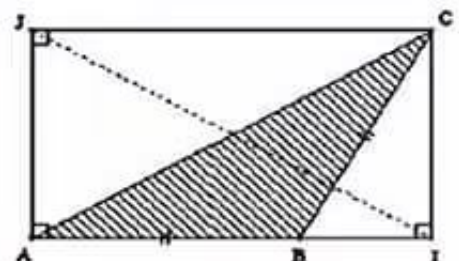
d) Déterminer l'ensemble Δ .



Exercice n° 3:

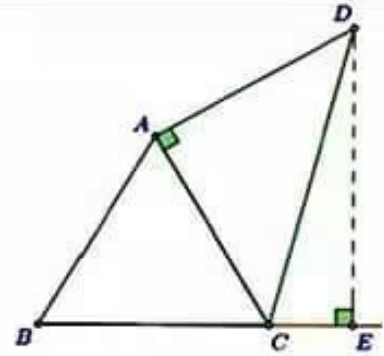
Dans la figure ci-contre $AICI$ est un rectangle tel que $AC = 4\sqrt{3}$ et B un point de $[AI]$ tel que $AB = BC = 4$

1. Montrer que $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = -8$
2. En déduire que $\cos \widehat{ABC} = -\frac{1}{2}$ et que $BI = 2$
3. Montrer que $\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CI} = 12$ et $\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CJ} = 12$
4. En déduire que $(CB) \perp (IJ)$
5. Soient $\Delta = \{M \in P ; MA^2 - MB^2 = 32\}$ et $\Gamma = \{M \in P ; MA^2 + MB^2 = 64\}$
 - a. Montrer que $M \in \Delta$ signifie que $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{AB} = 16$ avec O le milieu de $[AB]$
 - b. Montrer que $C \in \Delta$ puis déterminer Δ
 - c. Montrer que Γ est le cercle de centre O passant par C



Exercice n° 4:

Dans la figure ci-contre, ABC est un triangle équilatéral de côté 2 et ACD un triangle isocèle rectangle en A .



- 1°) a) Montrer que $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB} = -2\sqrt{3}$.
 b) Montrer que $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB}$.
 c) Montrer alors que $\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{CB} = 2(1 - \sqrt{3})$.
 d) En déduire que $CE = \sqrt{3} - 1$.
 e) Montrer que $DE = \sqrt{3} + 1$.
- 2°) Soit O le milieu de $[BC]$ et F le point de $[OA]$ tel que $OF = 1$.
 a) Déterminer les coordonnées des points A, B, E et D dans le repère orthonormé $(O, \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OF})$.
 b) Montrer alors que $\overrightarrow{AE} \perp \overrightarrow{BD}$.
- 3°) Soit $\Delta = \{M \in P; MC^2 - MB^2 = -4\sqrt{3}\}$ et $\Gamma = \{M \in P; MC^2 + MB^2 = 8\}$
 a) Montrer que $M \in \Delta$ équivaut à $2\overrightarrow{MO} \cdot \overrightarrow{BC} = -4\sqrt{3}$.
 b) Vérifier que $E \in \Delta$.
 c) Montrer que $\Delta = (DE)$.
 d) Montrer que Γ est le cercle de centre O et de rayon $\sqrt{3}$.

Exercice n° 5:

Soit ABC un triangle et I le milieu de $[BC]$ avec $IB = IC = 2$; $IA = 3$ et $\widehat{AIB} = \frac{\pi}{3}$

- 1) a) Montrer que $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AI^2 - IB^2$
 b) En déduire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$
- 2) a) Calculer $AB^2 + AC^2$ et $AB^2 - AC^2$
 b) En déduire AB et AC
 c) Donner la valeur exacte de $\cos(\widehat{BAC})$
- 3) Soit H le projeté orthogonal de A sur (BC)
 a) Montrer que : $AB^2 - AC^2 = 2\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{IH}$
 b) En déduire IH

Exercice n° 6:

Soit ABC un triangle tel que $AB = 4$, $AC = 6$ et $BC = 8$, on désigne par I le milieu de $[AB]$ et J le milieu de $[AC]$

- 1) Montrer que $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}(AB^2 + AC^2 - BC^2)$
- 2) Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ puis déduire $\cos \widehat{BAC}$
- 3) Soit H le projeté de B sur (AC) , calculer AH
- 4) Calculer $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$, en déduire BJ
- 5)
 a) Montrer que pour tout point M du plan on a $MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + 8$
 b) Calculer CI
 c) Déterminer l'ensemble $E = \{M \in P \text{ tel que } MA^2 + MB^2 = 100\}$
- 6) Montrer que pour tout point M du plan on a $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} = MJ^2 - 9$
- 7) Calculer $\overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{IC}$, déduire l'ensemble $E' = \{M \in P \text{ tel que } \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} = 7\}$
- 8) Soit O le milieu de $[IJ]$
 a) Montrer que $MI^2 - MJ^2 = 2\overrightarrow{IJ} \cdot \overrightarrow{OM}$
 b) Déterminer l'ensemble $E'' = \{M \in P \text{ tel que } MA^2 + MB^2 - 2\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MC} = -6\}$

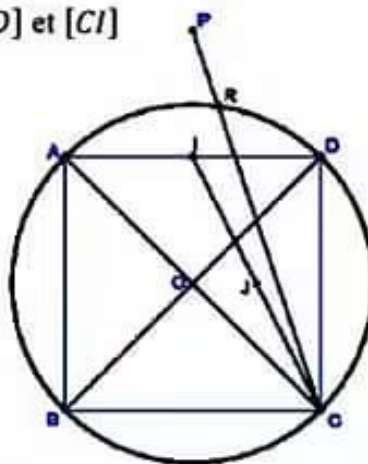
Exercice n° 7:

Dans la figure ci-contre $ABCD$ est un carré de côté 4 cm inscrit dans un cercle de centre O .

Soient les points I et J milieux respectifs des segments $[AD]$ et $[CI]$

Le point P symétrique du point O par rapport à I .

La droite (PC) recoupe le cercle de centre O en R .



1) a) Calculer $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BI}$ et $\overrightarrow{PI} \cdot \overrightarrow{JC}$

b) Calculer $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OC}$; $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PC}$ et PC .

c) Montrer que $\overrightarrow{PR} \cdot \overrightarrow{PC} = 8$ et en déduire RC .

2) a) Montrer que pour tout point M du plan on a :

$$MA^2 + MB^2 = 2MI^2 + 28$$

b) En déduire que : $2MC^2 + MA^2 + MB^2 = 4MJ^2 + 28$

c) Déterminer E_1 l'ensemble des points M du plan tel que : $2MC^2 + MA^2 + MB^2 = 32$

3) a) Montrer que pour tout point M du plan : $2MC^2 - MA^2 - MB^2 = 4\overrightarrow{MJ} \cdot \overrightarrow{JC} - 8$

b) Déterminer E_2 l'ensemble des points M du plan tels que :

$$2MC^2 - MA^2 - MB^2 = 4\overrightarrow{MJ} \cdot \overrightarrow{JC} - 8$$

Exercice n° 8:

Dans un plan muni d'un repère orthonormé on considère les points :

$A(2, 2)$; $B(1, 1)$ et $C(4, 0)$

1) Montrer que le triangle ABC est rectangle en A

2) Calculer les distances AB , AC et BC

3) Calculer $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}$ et en déduire la valeur de $\cos(\widehat{ACB})$

4) On désigne par H le projeté orthogonal du point A sur la droite (BC) et par $I = A * B$

a) Calculer les distances IH et AH

b) Déterminer les coordonnées du point H

Exercice n° 9:

Dans un plan muni d'un repère orthonormé on considère les points :

$A(-1, 1)$, $B(-2, 3)$ et $C\left(\frac{5}{2}, 4\right)$

1) a) Calculer AB et AC

b) Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ et donner la valeur de : $\cos(\widehat{BAC})$

2) a) Soit G le barycentre des points pondérés $(A, 1)$ et $(B, 2)$, calculer GA et G

b) Montrer que : $\forall M \in P$ on a : $MA^2 + 2MB^2 = 3MG^2 + GA^2 + 2GB^2$

c) En déduire l'ensemble (E) des points M du plan tel que : $MA^2 + 2MB^2 = \frac{22}{3}$