

Chapitre A1 : Systèmes de numération et codes

Résumé du cours

I. Systèmes de numération

a) Définition

Un système de numération est un ensemble de règles permettant d'écrire ou d'énoncer des nombres.

Un nombre est écrit, généralement, sous la forme suivante : $(XXXX)_B$

X : désigne un chiffre de ce nombre ;

B : désigne la base du système de numération. B correspond au nombre des chiffres utilisés dans ce système.

Exercice 1

Relier par des flèches les données suivantes afin d'identifier:

- les chiffres utilisés dans chacun des systèmes de numération proposés ci-dessous ;
- la base de chacun de ces systèmes ;
- un exemple correspondant à chaque système.

Système de numération	Chiffres du système De numération	base	Exemple
Système décimal	☐ Digits : 0,1,...,7	☐ 16	☐ $(16)_8$
Système binaire	☐ signes : 0,1,...,9,A,B,...F	☐ 8	☐ $(E)_{16}$
Système octal	☐ Chiffres : 0,1,...,9	☐ 2	☐ 14
Système hexadécimal	☐ Bits : 0, 1	☐ 10	☐ $(1110)_2$

Exercice 2

Complète les phrases suivantes

- Dans un système, les symboles utilisés sont des chiffres.
- Dans un système, les symboles utilisés sont appelés des signes.
- Dans un, les des bits.
- Dans un système, les digits.

Exercice 3

Complète les phrases suivantes

- La base d'un nombre décimal est (.....)
- La base d'un nombre est (8)
- La base d'un nombre est (16)
- La d'un nombre binaire est (...)
- La d'un code est (2)
- La d'un mot est (2)

b) Exemples de systèmes de numération

b-1) Système de numération arabe

Le système de numération arabe est appelé « système de numération décimal ». Il est identifié par :

- Sa base décimale « base 10 » ;
- Ces chiffres arabes (0, 1, 2, ..., 9). Cependant, ceux-ci sont d'origine Indienne. Ils sont désignés par

.	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Savoir plus :

- Les chiffres arabes sont introduits en Europe vers l'an 1000.
- Le mot français *chiffre* est une déformation du mot arabe « sifr » désignant zéro.

Exercice 1

1. Donner la date de naissance de ton père par des chiffres arabes.
2. Donner la date de naissance de ton père par des chiffres occidentaux.
3. Donner la date de naissance de ton grand père par des chiffres arabes.
4. Donner la date de naissance de ton grand père par des chiffres occidentaux.

Exercice 2

1. Dans combien du temps l'âge de ton père sera-t-il le double de ton âge ?
 - a) Écris le résultat par des chiffres arabes.
 - b) Écris le résultat par des chiffres occidentaux.
2. Dans combien du temps l'âge de ta mère sera-t-il le double de ton âge ?
 - a) Écris le résultat par des chiffres arabes.
 - b) Écris le résultat par des chiffres occidentaux.

Solution :

Un père âgé de 51 ans, soit $p=51$;

Son fils est âgé de 16ans, soit $f=16$;

Désignons par (x) le nombre d'années à déterminer. Le nombre (x) doit vérifier l'équation : $P+x=2 \times (f+x)$. Calculons (x) : $x= P- 2f$.

$x=19$ ans. Ainsi, après 19 ans on aura : $51+19 =2 \times (16 +19)$.

b-2) Système sexagésimal des Babyloniens

Les calculs, à la manière des Babyloniens, se faisaient en base 60: leur écriture en forme de coins, frappée dans l'argile, utilisaient un système de base 60, qu'utilisèrent les mathématiciens Indiens et Arabes pour leurs calculs trigonométriques.

Le signe 1 : représente l'unité et la base 60

Le signe 2 : chevron, il représente 10

 ou 
signes 1

 ou 
signes 2

b-3) Système de numération des Egyptiens de l'antiquité

Le système de numération n'utilise pas un symbole « zéro » : les nombres sont représentés par des pictogrammes (petits dessins hiéroglyphiques). On donne les représentations les plus simples:

 (unité) ,  (dix) et  (cent)

On écrivait de droite à gauche.

Exercice 2

Ecrire le nombre 324 dans le système des égyptiens de l'antiquité

Réponse

324 représente 4 unités, 2 dizaines et 3 centaines, il s'écrirait alors :

IIII 〇〇 999

Exercice 3

1. Dans combien du temps l'âge de ton père sera-t-il le double de ton âge ?

Écris le résultat dans le système des égyptiens de l'antiquité.

2. Dans combien du temps l'âge de ta mère sera-t-il le double de ton âge ?

Écris dans le système des égyptiens de l'antiquité

II. Système décimal

Le système décimal est le système universel utilisé pour écrire les nombre décimaux. Il utilise 10 chiffres (0 ; 1 ; ... ; 9). La base de ce système est alors 10.

Remarque : Un nombre décimal est écrit sans précision de sa base.

Exercice 4 : Déterminer la pondération du nombre 324. Donner une justification

Solution

324 s'écrit de gauche à droite comme étant trois centaines : 3×10^2 , auxquelles s'ajoutent deux dizaines : 2×10^1 et quatre unités : 4×10^0 .

$$324 = 3 \times 10^2 + 2 \times 10^1 + 4 \times 10^0$$

unités	dizaines	centaines
--------	----------	-----------

Exercice 5 :

Déterminer la pondération du nombre 304. Donner une justification **Solution**

304 signifie 3 centaines, aucune dizaine complémentaire : 0 (zéro) dizaine, mais 4 unités.

$$304 = 3 \times 10^2 + 0 \times 10^1 + 4 \times 10^0$$

unités	dizaines	centaines
--------	----------	-----------

Exercice 6 : Déterminer les rangs, les puissances et les pondérations du nombre 3942.

Solution

▪ Soit le nombre décimal 3942. On récapitule dans le tableau suivant les chiffres, les rangs, les pondérations et les puissances :

Chiffres	3	9	4	2
Rang	4	3	2	1
Puissance	10^3	10^2	10^1	10^0
Pondération	3000	900	40	1

On retrouve le nombre 3942 par l'addition des pondérations:
 $N = 5.10^3 + 9.10^2 + 6.10^1 + 2.10^0 = 5000 + 900 + 60 + 2 = (5962)_{10}$.

Exercice 7 : je suis un nombre décimal composé de trois chiffres. Mon chiffre des unités est le double de mes dizaines. Mon chiffre des centaines est égal à 9. Il est égal à la somme des chiffres des unités et des dizaines. Compléter le tableau suivant. Retrouver ce nombre.

Chiffres			
Rang			
Puissance			
Pondération			

Exercice 8 :

En écrivant les nombres de 1 à 100, combien écrit-on le chiffre 9 ? Donner les rangs et les pondérations du nombre obtenu.

Exercice 9 :

Soit un père âgé de 51ans. Son fils a 21 ans. Dans combien du temps l'âge du père sera-t-il le double de l'âge de son fils ? Donner les rangs et les pondérations des âges calculés.

Exercice 10 :

Je suis un nombre inférieur à 1000 et je m'écris avec 4 chiffres. Mon nombre de dizaines est 34 et je me termine par 6. En ajoutant mon chiffre des dizaines à celui de mes dixièmes, tu trouveras le double du chiffre de mes unités.

Exercice 11 :

Un nombre décimal entier $(N)_{10}$ de 5 chiffres, commençant par 3, possède la propriété suivante : si on déplace le 3 en dernière position (en chiffre des unités), alors on obtient ce nombre N augmenté de 29205. Quel est le nombre initial ?

Solution :

E7/ on écrit 20 fois le chiffre 9; si vous avez répondu 10 ou 11, vous avez sans doute oublié 91, 92, 93, ..., 99 !

E8/ Age du père = 60ans ; âge du fils = 30ans.

E9/ le chiffre des unités doit être 5 car $9 \times 5 = 45$ se termine par 5 et $9 \times 0 = 0$ est à rejeter puisque le nombre est impair. Dans cette multiplication, on retient 4.

E10/ Le nombre est au moins égal à 340 puisqu'il contient 34 dizaines. Comme il est inférieur à 1000 et s'écrivant avec 4 chiffres, il n'est pas entier et s'écrit avec un chiffre après la virgule qui sera le 6, soit : 34?,6. Le chiffre des dizaines est 4, $6 + 4 = 10$, le chiffre des unités est donc 5. Rép : 345,6.

e3-2/ Le problème revient à une soustraction à trous : $a \ b \ c \ d \ 3 - 3 \ a \ b \ c \ d = 29 \ 205$. Rép : 36 578.

III. Système binaire

Le système binaire est utilisé en électronique et les systèmes de traitement de l'information

Valeurs remarquables à connaître :

$2^{10} = 1024$ noté k. Ex: 1 ko (kilo octet) = 1024 octets ;

$2^{20} = 1\ 048\ 576$ noté M (méga) ;

$2^{30} = 1\ 073\ 741\ 824$ noté G (giga) ;

▪ **Base de système :** La base du système est 2.

▪ **Bits utilisés :** Les 2 symboles utilisés sont : 0 et 1. Ils sont appelés BITS

Exercice 12 : Déterminer les rangs, les puissances et les pondérations du nombre 1101.

Solution

- **Solution :** le nombre binaire **1101** identifié dans le tableau suivant :

Bits	1	1	0	1
Rang	4	3	2	1
Puissance	2^3	2^2	2^1	2^0
Pondération	8	4	0	1

L'addition des pondérations permet d'obtenir l'équivalent décimal du nombre binaire **1101** :

$$(1101)_2 = 1 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0 = 8 + 4 + 0 + 1 = (13)_{10}$$

Exercice 13 :

Qu'est ce qu'un quartet

Qu'est un octet

Solution

Un nombre composé de 4 bits est appelé un Quartet

Un nombre composé de 8 bits est appelé un Octet

Exercice 14 :

Déterminer le MSB et le LSB du nombre 10110111

Solution :

1	0	1	1	0	1	1	1
b₇	b₆	b₅	b₄	b₃	b₂	b₁	b₀
MSB							LSB

MSB : Most Significant Bit ou bit de plus fort poids **b₇**.

LSB : Least Significant Bit Le bits de plus faible poids **b₀**.

Exercice 15 :

Donner les le nombre des chiffres utilisés dans les systèmes suivant

- Système binaire
- Système octal
- Système décimal
- Système duodécimal
- Système hexadécimal

Solution :

- 2 bits, b) 8 digits ; c) 10 chiffres ; d) 12 signes ; e) 16 signes

IV. Système octal

Exercice 16 :

- Quel est la base de ce système
- Donner les digits utilisés dans cette base
- Déterminer dans un tableau les rangs, les puissances et pondération du nombre $(216)_8$
Calculer la somme des pondérations.

Solution

- Base de système : La base du système est 8.
- Symboles utilisés : 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 et 7.
- Le nombre 216 écrits dans le système octal est identifié dans le tableau suivant :

Digits	2	1	6
Rang	3	2	1
Puissance	8^2	8^1	8^0
Pondération	128	8	6

L'addition des pondérations permet d'obtenir l'équivalent décimal du nombre octal 216 :

$$(216)_8 = 2 \times 8^2 + 1 \times 8^1 + 6 \times 8^0 = 128 + 8 + 6 = (142)_{10}$$

V. Système hexadécimal

Exercice 17 :

- Quel est la base de ce système
- Donner les digits utilisés dans cette base
- Déterminer dans un tableau les rangs, les puissances et pondération du nombre $(C7A)_{16}$. Calculer la somme des pondérations.

Solution

a) Base de système : La base du système est 16.

b) Symboles utilisés : 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, et F .

En décimal	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
En hexadécimal	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	A	B	C	D	E	F

c) Le nombre $(C7A)_{16}$ écrits dans le système octal est identifié dans le tableau suivant :

Exemple : Soit le nombre C7A écrit dans le système hexadécimal :

Digits	C	7	A
Rang	3	2	1
Puissance	16^2	16^1	16^0
Pondération	3072	112	10

L'addition des pondérations permet d'obtenir l'équivalent décimal du nombre binaire 1011 :

$$(C7A)_{16} = 12 \times 16^2 + 7 \times 16^1 + 10 \times 16^0 = 128 + 8 + 6 = (3194)_{10}$$

VI. Conversion des systèmes de numération

La figure suivante récapitule les différentes opérations réalisées avec des nombres de différentes bases

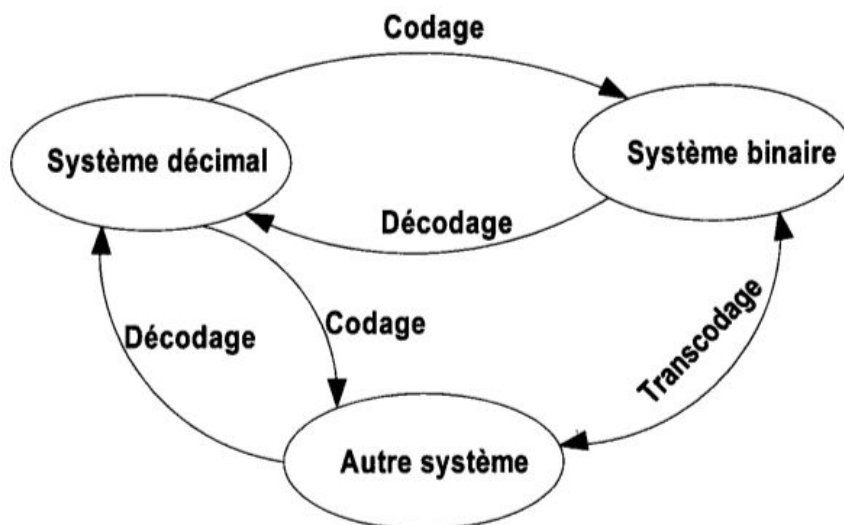


Figure 1

1. Codage

Exercice 18 :

Relier par une flèche chaque fonction à sa définition

Fonction		Définition
Codage	☐	☐ Conversion de deux nombres non décimaux
Décodage	☐	☐ Conversion d'un nombre décimal en un nombre ayant une base autre que la base décimale.
Transcodage	☐	☐ Conversion d'un nombre ayant une base non décimale en un nombre décimal.

Exercice 19 :

Relier par une flèche chaque fonction à sa méthode de calcul convenable.

Fonction		Définition
Codage	☐	☐ Additionner les pondérations
Décodage	☐	☐ Le calcul est effectué en deux étapes : 1) décoder ; 2) coder
Transcodage	☐	☐ Le calcul est effectué en deux étapes : 1) appliquer la méthode de la division successive ou l'addition successive ; 2) retrouver le nombre dans la nouvelle base en classant les restes du calcul du bas en haut.

Cas particuliers du transcodage:

Exercice 20 :

Relier par une flèche chaque fonction à la méthode de calcul convenable

Fonction		Méthode
a) Conversion d'un nombre binaire en un nombre octal	☐	☐ C'est remplacer chaque digits du nombre octal par son équivalent binaire sur 3 bits
b) Conversion d'un nombre hexadécimal en un nombre binaire	☐	☐ C'est regrouper le nombre binaire en lots de 3 bits et trouver l'équivalent octal de chaque lot
c) Conversion d'un nombre binaire en un nombre hexadécimal	☐	☐ C'est remplacer chaque signe hexadécimal du nombre par son équivalent binaire sur 4 bits
d) Conversion d'un nombre octal en un nombre binaire	☐	☐ C'est regrouper le nombre binaire en lots de 4 bits et trouver l'équivalent hexadécimal de chaque lot

Exercice 21

Relier par une flèche chaque nombre à son équivalent

Nombre 1		Nombre équivalent
$(321)_8$	☐	☐ $(313)_8$
$(5AF)_{16}$	☐	☐ $(011\ 010\ 001)_2$
$(11001011)_2$	☐	☐ $(BC)_{16}$
$(11001011)_2$	☐	☐ $(0101\ 1010\ 1111)_2$

VII.Code binaire naturel ou code binaire pur

Le code binaire naturel est un code associé au système de numération binaire.

VIII. Code binaire réfléchi ou code Gray

Entre deux nombres consécutifs codés binaire naturel, plusieurs variables changent de valeurs à la fois. Alors Entre deux nombres consécutifs codés binaire réfléchi (GRAY), une seule variable change de valeurs.

LE code binaire naturel est essentiellement utilisé dans le calcul arithmétique. Le code GRAY est utilisé dans la simplification des fonctions logiques par la méthode GRAPHIQUE

Construction du code Gray : Principe de réflexion par miroir

Pour deux bits

0	0
0	1
1	1
1	0

Miroir

Pour trois bits

0	0	0
0	0	1
0	1	1
0	1	0
1	1	0
1	1	1
1	0	1
1	0	0

Miroir1
Miroir2

IX. Conversions entre codes binaires (Transcodage)

1. Transcodage du binaire naturel en binaire réfléchi

Méthode de conversion

Convertir le nombre binaire naturel $(B_i B_{i-1} .. B_2 B_1 B_0)_{BN}$ en binaire réfléchi $(G_i G_{i-1} .. G_2 G_1 G_0)_{BR}$:

- ✓ $G_i = B_i$
- ✓ Si $B_i = B_{i-1}$ alors $G_{i-1} = 0$
- ✓ Si B_i et B_{i-1} ont des valeurs différentes alors $G_{i-1} = 1$

Exercice : Transcoder le nombre binaire naturel $(1101)_{BN}$ en binaire réfléchi

Solution

B_3	B_2	B_1	B_0
1	1	0	1
↓	↓	↓	↓
1	0	1	1
G_3	G_2	G_1	G_0

$(1101)_{BN} = (1011)_{BR}$

2. Transcodage du binaire réfléchi en binaire naturel

■ **Méthode de conversion**

Convertir le nombre binaire réfléchi $(G_i G_{i-1} .. G_2 G_1 G_0)_{BR}$ en binaire naturel $(B_i B_{i-1} .. B_2 B_1 B_0)_{BN}$:

- ✓ $B_i = G_i$
- ✓ Si $B_i = G_{i-1} \Rightarrow B_{i-1} = 0$
- ✓ Si B_i et G_{i-1} ont des valeurs différentes $\Rightarrow B_{i-1} = 1$

Exercice : Transcoder le nombre binaire réfléchi $(1011)_{BR}$ en binaire naturel

Solution

$$(1011)_{BR} = (1101)_{BN}$$

X. Code B.C.D (Binary Coded Décimal)

Le code B.C.D (ou .D.C.B : Décimal Codé en Binaire en français) est le code le plus utilisé. Dans ce code, chaque chiffre du nombre décimal est codé individuellement sur quatre bits (quartet).