

Chapitre II

Continuité

■ Définition:

f définie sur un intervalle ouvert I et $a \in I$. On dit que f est continue en a signifie que pour tout nombre $\beta > 0$ il existe un nombre $\alpha > 0$ tel que si $x \in I$, $|x - a| < \alpha$ alors $|f(x) - f(a)| < \beta$

Exemple :

$f(x) = 2x - 1$ et $a = 2$. Montrer que f est continue en 2 ?

pour tout $\beta > 0$ existe-t-il un $\alpha > 0$ tel que $|x - 2| < \alpha$ alors $|f(x) - f(2)| < \beta$

on sait que $|f(x) - f(2)| < \beta$ or $f(2) = 3 \Leftrightarrow |(2x - 1) - 3| < \beta$

soit $|2x - 4| < \beta$ où encore $2|x - 2| < \beta \Leftrightarrow |x - 2| < \frac{\beta}{2}$ il suffit de choisir $\alpha = \frac{\beta}{2}$.

ainsi f est continue en 2.

■ Continuité de certaines fonctions usuelles en un point a :

Fonction	Continue en tout point a de
$x \mapsto c$ constante	$\mathbb{R}$
$x \mapsto x$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto ax$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto ax + b$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto x^2$	$\mathbb{R}$
Toute fonction polynôme	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \frac{1}{x}$	$\mathbb{R}^*$
Toute fonction rationnelle	Domaine de définition
$x \mapsto \sqrt{x}$	$\mathbb{R}_+$
$x \mapsto \sqrt{f(x)}$	Son domaine de définition

■ Opérations sur les fonctions continues :

Théorèmes : 1) f continue en $a \Rightarrow |f|$ est continue en a .

2) f continue en a $\left. \begin{array}{l} \\ f(a) > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \sqrt{f}$ est continue en a .

3) Soient f et g deux fonctions continues en a et $\alpha \in \mathbb{R}$
 $\Rightarrow f + g$, $f \times g$, αf sont continues en a .

$$4) \left. \begin{array}{l} f \text{ est continue en } a \\ f(a) \neq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{1}{f} \text{ est continue en } a.$$

$$5) f \text{ et } g \text{ sont continues en } a \text{ et } g(a) \neq 0 \Rightarrow \frac{f}{g} \text{ est continue en } a.$$

Exemple : • $f(x) = \frac{\sqrt{x-2}}{x^2 + 2x + 5}$. Justifier que f est continue en 2.

$x \mapsto \sqrt{x-2}$ continue en 2.

$x \mapsto x^2 + 2x + 5$ est une fonction polynôme donc continue

en 2 et $2^2 + 2 \times 2 + 5 = 13 \neq 0. \Rightarrow f$ est continue en 2.

■ Illustration graphique :

• On reconnaît qu'une fonction est continue lorsque sa courbe représentative eut être tracer sans lever le crayon

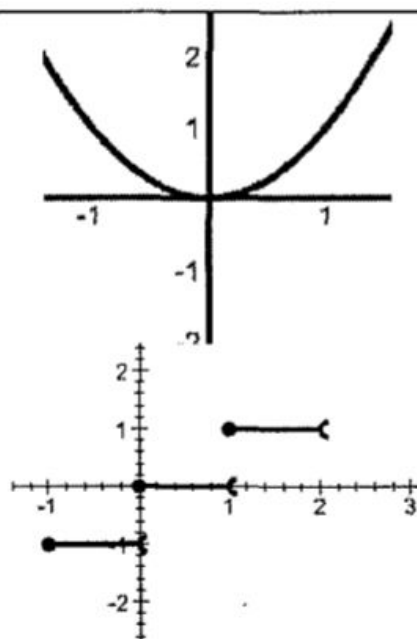
:

• Exemple :

$f(x) = x^2$ est continue sur $\mathbb{R}$ ξ_f est une parabole,

f peut être tracée sans lever le crayon.

• **Contre exemple** : $f(x) = E(x)$ la partie entière de x lorsqu'on trace sa courbe il faut lever le crayon en tout point d'abscisse entière



■ Continuité à gauche et à droite :

• Définitions :

1) f définie sur $[a, b[= I$

f est **continue à droite** en a signifie que pour $\beta > 0$, il existe un $\alpha > 0$ tel que

$$\text{Si } x \in I, 0 \leq x - a \leq \alpha \text{ alors } |f(x) - f(a)| < \beta$$

Exemple :

$$f(x) = \sqrt{x}, a = 0, Df = [0, +\infty[$$

$$\text{Soit } \beta > 0, \text{ existe il un } \alpha > 0 \text{ tel que } 0 \leq x \leq \alpha \text{ alors } |\sqrt{x} - \sqrt{0}| < \beta$$

$$\text{on sait que } |\sqrt{x}| < \beta \Rightarrow \sqrt{x} < \beta \Rightarrow 0 \leq x \leq \beta^2$$

ainsi on peut choisir $\alpha = \beta^2$ d'où l'existence de α par suite f est continue à droite en 0.

2) f définie sur $]b, a] = I$

f est **continue à gauche** en a signifie que pour tout $\beta > 0$, il existe un $\alpha > 0$ tel que pour tout $x \in I$, $0 < a - x < \alpha$ alors $|f(x) - f(a)| < \beta$

théorème :

f définie sur I intervalle ouvert contenant a , f est **continue en a**

$\Leftrightarrow f$ est continue à droite et à gauche en a .

■ **Continuité sur un intervalle:**

- f est continue sur $]a, b[\Leftrightarrow f$ est continue en tout point $x_0 \in]a, b[$.
- f est continue sur $[a, b[\Leftrightarrow f$ est continue sur $]a, b[$ et à droite en a .
- f est continue sur $]a, b] \Leftrightarrow f$ est continue sur $]a, b[$ et à gauche en b .

■ **Opérations sur les fonctions continues sur un intervalle :**

Théorèmes:

- 1) Toute fonction polynôme est continue sur $\mathbb{R}$.
- 2) Toute fonction rationnelle est continue sur son domaine de définition.
- 3) $x \mapsto \sqrt{x}$ est continue sur $[0, +\infty[$
- 4) fonction continue sur I et positif $\Rightarrow \sqrt{f}$ est continue sur I .
- 5) f et g sont continue sur I , $\alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow f \times g$, $f + g$ et αf sont continue sur I .
- 6) f et g sont continue sur I et $g(x) \neq 0 \Rightarrow \frac{f}{g}$ est continue sur I .

■ **Le théorème des valeurs intermédiaires :**

• **Théorème :**

L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.

- **Définition :** f définie sur un intervalle A alors $f(A) = \{f(x) \text{ tel que } x \in A\}$.

• **Théorème des valeurs intermédiaires :**

f continue sur un intervalle I , a, b deux réels de I

Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$ il existe au moins sur c

Compris entre a et b tel que $f(c) = k$.

• **Cas particulier :**

Si f continue sur un intervalle I , a et b deux réels de I ($a < b$) et $f(a) \cdot f(b) < 0$ alors l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution dans $]a, b[$.

- Remarque : Si on sait de plus que f est croissante ou décroissante sur $[a, b]$ alors la solution est unique.

• **Interprétation graphique :**

f continue sur $[a, b]$ et ζ est

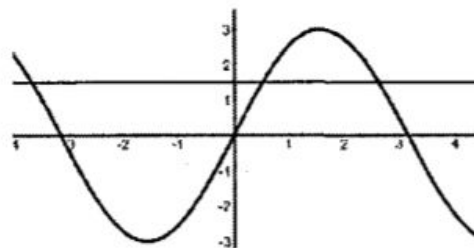
la courbe de f .

Pour tout réel k compris

entre $f(a)$ et $f(b)$,

la droite $\Delta: y = k$ coupe

au moins une fois la courbe ζ .



Remarque :

Le théorème des valeurs intermédiaires assure l'existence d'au moins une solution à l'équation $f(x) = k$.

Mais il n'indique pas comment la calculer ni le nombre de solution de cette équation.

Exemple :

$$f(x) = x^3 + 4x^2 + 4x + 2$$

Montrer sur l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution dans $[-3, -1]$.

Réponse : $f(-3) = -1$ et $f(-1) = 1$

f est une fonction polynôme donc continue sur $\mathbb{R}$

donc f est continue sur $[-3, -1]$

comme $f(-3) \cdot f(-1) = -1 < 0$

donc il existe au moins un $c \in]-3, -1[$ tel que $f(c) = 0$

ainsi c est une solution de $f(x) = 0$.