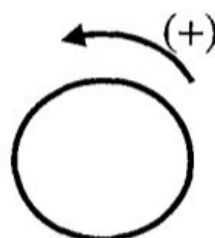


Chapitre II

Angles orientés

■ Orientation du plan :

Orienter le plan c'est choisir pour tous les cercles un même sens de rotation appelée « sens positif ». En général, on choisit comme sens Positif le sens inverse des aiguilles d'une montre.



■ Arcs orientés :

• Définition : On appelle arc orienté du cercle ζ un couple (A, B) de points de ζ on note $\overrightarrow{AB}$

• Longueur d'un arc du cercle :

Soit A et B deux points d'un cercle $\zeta_{(O, R)}$

Si α est une mesure en radian de l'angle $\widehat{AOB}$ alors la longueur ℓ de l'arc $\overrightarrow{AB}$ est $\ell = R \cdot \alpha$ Si $R=1$ alors $\ell = \alpha$.

• Si α est une mesure de l'arc $\overrightarrow{AB}$ alors $-\alpha$ est une mesure de l'arc $\overrightarrow{BA}$
On dit que $\overrightarrow{BA}$ est l'arc opposé de $\overrightarrow{AB}$.

• Définition : Soient A et B deux points du cercle trigonométrique on appelle mesure algébrique de l'arc orienté $\overrightarrow{AB}$ qu'on note $\text{mes } \overrightarrow{AB}$ tout réel de la forme $\alpha + 2k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$
par convention $\text{mes } \overrightarrow{AA} = 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$

• Propriétés : $\zeta_{(0,1)}$ le cercle trigonométrique

x et y sont deux mesures d'un même arc orienté $\Rightarrow x - y = 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$. Notation $x - y \equiv 0(2\pi)$ on lit $x - y$ est congru à 0 modulo 2π

Quel que soit le nombre réel α et le point A de ζ

Il existe un seul point M de ζ tel que α soit une mesure de $\overrightarrow{AM}$

Tout arc orienté de ζ possède une seule mesure dans $[0, 2\pi[$

A, B, C de ζ on a alors $\text{mes } \overrightarrow{AB} + \text{mes } \overrightarrow{BC} \equiv \text{mes } \overrightarrow{AC} \pmod{2\pi}$ Relation de Chasles

$\text{mes } \overrightarrow{AB} \equiv -\text{mes } \overrightarrow{BA} \pmod{2\pi}$

■ Angles orientés de deux vecteurs non nuls :

Deux vecteurs non nuls ; O, A et B trois points du plan tels que :

$$\overrightarrow{OA} = \vec{u} \text{ et } \overrightarrow{OB} = \vec{v}$$

A L'angle géométrique $\hat{A\hat{O}B}$ correspond deux angles orientés de vecteurs distincts : $(\vec{u}, \vec{v}) = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ et $(\vec{v}, \vec{u}) = (\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OA})$

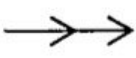
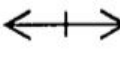
■ Mesure principale d'un angle orienté

La valeur absolue de la mesure principale d'un angle orienté $(\vec{u}, \vec{v})$ ou encore $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ est la mesure de l'angle géométrique $\hat{A\hat{O}B}$ positif si on tourne dans le sens positif négatif si non

- La mesure principale d'un angle orienté est sa mesure qui appartient à l'intervalle $]-\pi, \pi]$

■ Mesure d'un angle orienté :

- Un angle orienté de vecteurs à une infinité de mesures.
- Si α est une mesure en rd de $(\vec{u}, \vec{v})$ alors toute autre mesure est de la forme $\alpha + 2k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$
- Notation : $(\vec{u}, \vec{v}) = \alpha + 2k\pi \equiv \alpha [2\pi]$.
- Cas particulier

Angle nul		$(\vec{u}, \vec{v}) \equiv 0 [2\pi]$
Angle droit		$(\vec{u}, \vec{v}) \equiv \frac{\pi}{2} \text{ ou } -\frac{\pi}{2} [2\pi]$
Angle plat		$(\vec{u}, \vec{v}) \equiv \pi [2\pi]$

■ Propriétés des angles orientés :

- A, B et C sont alignés si et seulement si $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ est nul ou plat si et seulement si $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv 0 (2\pi) \text{ ou } \pi (2\pi)$
- $(AB) \perp (CD)$ si et seulement si $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD})$ est droit si et seulement si $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) \equiv \frac{\pi}{2} \text{ ou } -\frac{\pi}{2} (2\pi)$.
- $(AB) \parallel (CD)$ si et seulement si $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) \equiv 0 \text{ ou } \pi (2\pi)$

Relation de « Chasles » : $(\vec{u}, \vec{v}) + (\vec{v}, \vec{w}) \equiv (\vec{u}, \vec{w}) (2\pi)$

- $(\vec{u}, \vec{v}) \equiv -(\vec{v}, \vec{u}) [2\pi]$

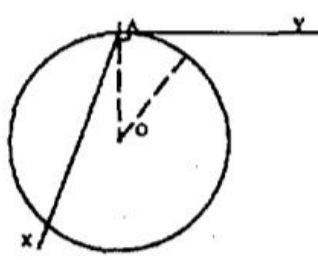
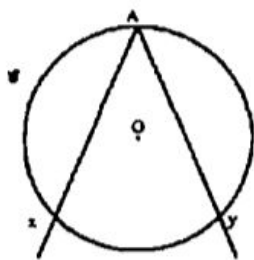
- $\left(\vec{u}, -\vec{v}\right) \equiv \left(\vec{u}, \vec{v}\right) + \pi [2\pi]$ et $\left(-\vec{u}, -\vec{v}\right) \equiv \left(\vec{u}, \vec{v}\right) [2\pi]$

- Si $S_{\Delta}\left(\vec{u}, \vec{v}\right) = \left(\vec{u}', \vec{v}'\right)$ alors $\left(\vec{u}', \vec{v}'\right) \equiv -\left(\vec{u}, \vec{v}\right) [2\pi]$

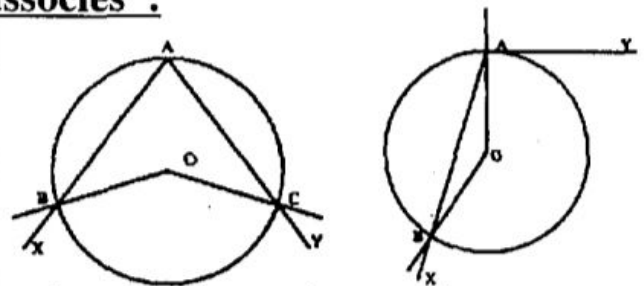
- Si $S_I\left(\vec{u}, \vec{v}\right) = \left(\vec{u}', \vec{v}'\right)$ alors $\left(\vec{u}', \vec{v}'\right) \equiv \left(\vec{u}, \vec{v}\right) [2\pi]$

• Toute translation et toute homothétie conserve l'angle orienté.

■ Angles inscrits – Angles au centre associés :

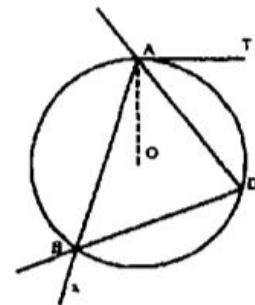
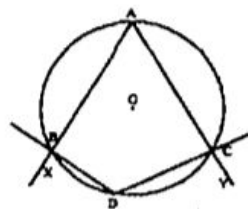
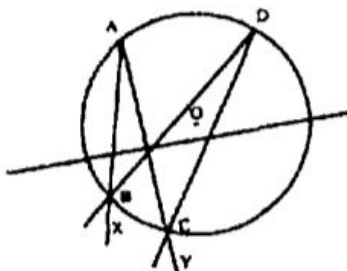


* L'angle (Ax, Ay) est inscrit dans ζ si et seulement si $A \in \zeta$ et $[Ax), [Ay)$ recoupe ζ ou l'une est une tangente à ζ



$(\vec{OB}, \vec{OC})$ et $(\vec{Ax}, \vec{Ay})$ interceptent le même arc $\widehat{BC}$ donc $(\vec{OB}, \vec{OC})$ est l'angle au centre associé à $(\vec{Ax}, \vec{Ay})$.

■ Relation entre deux angles inscrits interceptant le même arc :

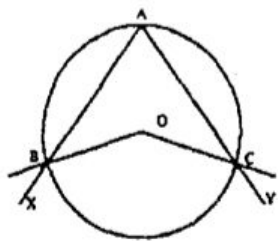


• A et D appartiennent Au même arc $\widehat{CB}$ (ou $\widehat{BC}$) alors
 $(\vec{AB}, \vec{AC}) \equiv (\vec{DB}, \vec{DC}) (2\pi)$

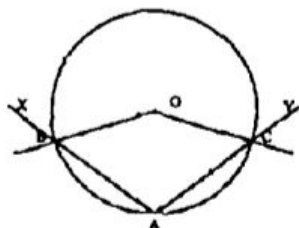
A et D sont situés l'un sur $\widehat{BC}$ et l'autre sur $\widehat{CB}$ alors
 $(\vec{AB}, \vec{AC}) \equiv (\vec{DB}, \vec{DC}) + \pi (2\pi)$

$(\vec{AT}, \vec{Ay})$ et $(\vec{DA}, \vec{DB})$ inscrite et interceptent le même arc $\widehat{BA}$ alors $(\vec{AT}, \vec{Ay}) \equiv (\vec{DA}, \vec{DB}) (2\pi)$ et si $\widehat{TAy}$ est aigu alors
 $(\vec{AT}, \vec{Ay}) \equiv (\vec{DA}, \vec{DB}) + \pi (2\pi)$

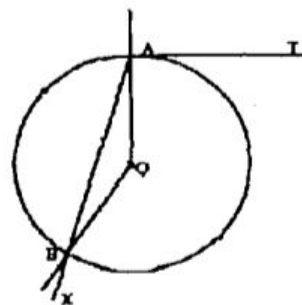
■ Relation entre angles inscrits et angles au centre associés :



$$(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}) \equiv 2 (\overrightarrow{AX}, \overrightarrow{AY}) \quad (2\pi)$$



$$(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) \equiv 2(\overrightarrow{AT}, \overrightarrow{AY})(2\pi)$$



■ Lieux géométriques :

* Soit $Y = \{ M \in P / (\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \alpha + 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z}) \}$

a) Si $\alpha = 0 + 2k\pi$ alors $Y = (AB) \setminus [AB]$

b) Si $\alpha = \pi + 2k\pi$ alors $Y =]AB[$.

c) Si $\alpha \neq 0$ et $\alpha \neq \pi$ modulo (2π) alors Y égale à $\widehat{BA}$

est l'arc du cercle situé dans le demi-plan de frontière (BA) ne contenant pas $[AT]$ tel que la tangente (AT) à vérifie $(\overrightarrow{AT}, \overrightarrow{AB}) = \alpha + 2k\pi$

* Construction de ζ :

- Tracer Δ' la médiatrice de $[AB]$.

- Construire la tangente (AT) . Vérifions

la relation $(\overrightarrow{AT}, \overrightarrow{AB}) \equiv \alpha \ (2\pi)$

- Construire Δ la perpendiculaire à (AT) en A.

- Le centre I du cercle est situé sur $\Delta \cap \Delta'$ et le rayon est IA .

