

Exercice 1

Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{x^4 - 2x^3 + ax + b}{(x-1)(x-2)}$ avec a et b deux réels. Déterminer les valeurs de a et b pour que $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 3$ et $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 7$

Exercice 2

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par
$$\begin{cases} f(x) = \frac{\sqrt{x}-1}{x-1} & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ f(x) = \frac{x^2-x}{x^2-1} & \text{si } x > 1 \\ f(1) = \frac{1}{2} \end{cases}$$

- 1) Montrer que $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}+1}$ si $0 \leq x < 1$
- 2) Montrer que f est continue à gauche en 1
- 3) Montrer que f est continue à droite en 1
- 4) Etudier la continuité de f sur $[0, +\infty[$

Exercice 3

Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par
$$\begin{cases} g(x) = 3x - 2 & \text{si } x > 2 \\ g(x) = -x^2 & \text{si } x < 2 \\ g(2) = 4 \end{cases}$$

- 1) Montrer que la fonction g est continue à droite en 2
- 2) Etudier la continuité à gauche en 2 de g ?
- 3) Montrer que la fonction $|g|$ est continue sur $\mathbb{R}$

Exercice 4

Soit f la fonction définie par $f(x) = \sqrt{2x-1} - \frac{1}{2}x$

- 1) Justifier la continuité de f sur $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right[$
- 2) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution $\alpha \in \left]\frac{1}{2}, 1\right[$
- 3) Donner une valeur approchée par excès de α à 0,1 près.

Exercice 5

Soit f la fonction définie par
$$\begin{cases} f(x) = \sqrt{x^2+4} - x & \text{si } x \geq -1 \\ f(x) = \frac{x+2}{x^2+x-2} & \text{si } x < -1 \end{cases}$$

- 1) Déterminer le domaine de définition de f
- 2) Montrer que f est prolongeable par continuité en 2
- 3) a) Etudier la continuité de f à droite en -1
b) Etudier la continuité de f à gauche en -1
c) la fonction f est-elle continue en -1

Exercice 6

On considère la fonction f définie par $f(x) = \frac{2 - \sqrt{2x+4}}{x}$

- A)**
- 1) Déterminer le domaine de définition de f
 - 2) Justifier que f est continue sur son domaine de définition
 - 3) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

4) Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$. La fonction f est-elle prolongeable par continuité en 0 ?

B) Soit g la fonction définie par
$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \geq -2 \text{ et } x \neq 0 \\ m & \text{si } x = 0 \\ \frac{3x^3 + 6x^2}{2x^2 - 4x - 6} & \text{si } x < -2 \end{cases}$$

- 1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $2x^2 - 4x - 6 = 0$ puis déduire le domaine de définition de g
- 2) Calculer $\lim_{x \rightarrow -2^-} g(x)$
- 3) La fonction g est-elle continue en -2 ?
- 4) Pour quelle valeur de m , g est continue en 0 ?
- 5) Discuter alors suivant les valeurs de m , le domaine de continuité de g

Exercice 7

Soit f la fonction définie par
$$f(x) = \begin{cases} x^4 - 4x^2 + 1 & \text{si } x \geq -1 \\ \sqrt{x^2 - 1} & \text{si } x < -1 \end{cases}$$

- 1) Montrer que f est continue sur $]-\infty, -1[$ et sur $[1, +\infty[$
- 2) a) Etudier la continuité de f en -1
b) Déduire le domaine de continuité de f
- 3) a) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution $\alpha \in]-1, 0[$
b) Donner une valeur approchée par excès à 0,1 près de α

Exercice 8

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ par :
$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4}{x - 2} & \text{si } x < 2 \\ \frac{x - 2}{\sqrt{x + 2} - 2} & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

- 1) Calculer $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$
- 2) La fonction f admet-elle une limite en 2 ?
- 3) La fonction f est-elle prolongeable par continuité en 2 ?

Exercice 9

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par
$$f(x) = \begin{cases} \frac{x - 2}{x^2 + 1} & \text{si } x < 0 \\ 2x^2 - 5x - 2 & \text{si } 0 \leq x \leq 3 \\ \frac{2x^3 - 7x + 1}{x^2 - 9} & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

- 1) a) Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$
b) La fonction f est-elle continue en 0 ?
- 2) Etudier la continuité de f en 3
- 3) Déterminer le domaine de continuité de f

Exercice 10

Soit g la fonction définie sur tout $\mathbb{R}$ par : $g(x) = \frac{2x^2 + 4x - 6}{x + 3}$

- 1) Montrer que g est prolongeable par continuité en -3 et déterminer son prolongement
- 2) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par
$$f(x) = \begin{cases} x + \sqrt{x - 2} & \text{si } x \geq 2 \\ g(x) & \text{si } x < 2 \text{ et } x \neq -3 \\ -8 & \text{si } x = -3 \end{cases}$$

a) Montrer que f est continue en 2
b) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$
c) Montrer que l'équation $f(x) = 3$ possède au moins une solution dans $[2, 3]$

Exercice 11

Soit g la fonction définie sur $[-1, +\infty[$ par $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x + 1} + 1}$

- 1) a) Justifier que g est continue sur $[-1, +\infty[$

b) Calculer alors $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$

2) Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{\sqrt{x+1}-1}{x}$

- Déterminer le domaine de définition D_f de f
- Montrer que pour tous $x \in D_f$ on a $f(x) = g(x)$
- En déduire que f est prolongeable par continuité en 0

Exercice 12

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} x\sqrt{x+3}-1 & \text{si } x \geq -3 \\ \frac{x^3+3x^2-10x-30}{x+3} & \text{si } x < -3 \end{cases}$

- Vérifier que pour tout $x < -3$ on a $f(x) = x^2 - 10$
 - Montrer que f est continue en -3
 - Etudier la continuité de f sur son domaine de définition
- Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet dans $[-3, 0]$ au moins une solution α
 - Montrer que α est une solution de l'équation : $x^3 + 2x^2 - 2x - 1 = 0$

Exercice 13

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x + 1 & \text{si } x \leq -1 \\ a + \sqrt{1-x^2} & \text{si } -1 < x < 1 \\ \sqrt{x-1} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

- Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$
- Calculer $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x)$
 - Pour quelle valeur de a f admet une limite en -1
 - Pour la valeur de a trouvée f est-elle continue en -1 ?
- Pour quelle valeur de a la fonction f est continue en 1 ?

Exercice 14

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-3\}$ par $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} & \text{si } x > 0 \\ \frac{x^2+2x-3}{x+3} & \text{si } x \leq 0 \text{ et } x \neq -3 \end{cases}$

On désigne par $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé

- Montrer que f est prolongeable par continuité en -3
- Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$. Interpréter graphiquement le résultat
- Vérifier que pour tout $x > 0$ on a $f(x) = \sqrt{\frac{x^2+1}{x^2}}$
 - Déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$. Interpréter graphiquement le résultat
- Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$
 - Montrer que la droite $\Delta : y = x - 1$ est une asymptote oblique à $\mathcal{C}$ au voisinage de $-\infty$

Exercice 15

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1-x^2}{|x-2|}$

- Déterminer D_f le domaine de définition de f
- Calculer $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$
- La fonction f admet-elle une limite en 2 ? Justifier votre réponse

Exercice 16

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{x^2+3x-4} & \text{si } x > 0 \\ \sqrt{-x+1} + x + a & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$

- 1) Factoriser le trinôme $x^2 + 3x - 4$ et déduire le domaine d'existence de $\frac{x-1}{x^2+3x-4}$
- 2) Déterminer alors le domaine de définition de f
- 3) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$
- 4) a) Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$
 b) Calculer, en fonction de a , $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$
 c) Pour quelle valeur de a f admet-elle une limite en 0?

Exercice 17

Soit f la fonction définie par :
$$\begin{cases} f(x) = \sqrt{x^2 + 5} - x - 1 & \text{si } x \geq 2 \\ f(x) = \frac{(x-2)^2}{3x^2 - 8x + 4} & \text{si } x < 2 \end{cases}$$

- 1) Donner le domaine de définition de f
- 2) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$
- 3) a) Montrer que f est continue en 2
 b) Déterminer le domaine de continuité de f

Exercice 18

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sqrt{x-2}$

- 1) Déterminer le domaine de définition de f
- 2) a) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$
 b) f possède-t-elle une limite en $-\infty$? Justifier
- 3) Soit g la fonction définie par $g(x) = \frac{\sqrt{x-2}}{x^2 - x - 2}$
 a) Déterminer D_g
 b) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$
 c) Calculer $\lim_{x \rightarrow 2^+} g(x)$. g possède-t-elle une limite en 2? Justifier

Exercice 19

Soit f la fonction définie sur tout $\mathbb{R}$ par :
$$\begin{cases} f(x) = \frac{\sqrt{x+1}-1}{x} & \text{si } x \geq -1 \\ f(x) = \frac{x^2+2x-3}{x-1} & \text{si } x < -1 \end{cases}$$

- 1) Déterminer le domaine de définition de f
- 2) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$
- 3) a) Etudier l'existence de la limite de f en -1
 b) f est-elle continue en -1 ? Justifier votre réponse.
- 4) Déterminer le domaine de continuité de f
- 5) Déterminer le prolongement par continuité de f en 0?

Exercice 20

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{x^2 - 2x - 2}{x+1}$ et on note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

- 1) a) Déterminer le domaine de définition de f
 b) Calculer $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x)$ puis interpréter graphiquement le résultat obtenu
- 2) a) Déterminer les réels a , b et c tel que pour tout $x \in D_f$ on a : $f(x) = ax + b + \frac{c}{x+1}$
 b) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$
 c) Montrer que la droite $\mathcal{D}: y = x - 3$ est une asymptote oblique pour $\mathcal{C}$ au voisinage de $+\infty$ et $-\infty$
 d) Etudier la position de $\mathcal{C}$ par rapport à $\mathcal{D}$

Exercice 21

Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{x^3 + x^2 - 1}{x^2 - 1}$. On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

- 1) Déterminer le domaine de définition D_f de f
- 2) Montrer que pour tout $x \in D_f$, $f(x) = x + 1 + \frac{x}{x^2 - 1}$
- 3) Déterminer les limites de f en -1 et en 1 . Interpréter graphiquement les résultats obtenus
- 4) a) Déterminer la limite de f en $-\infty$ et en $+\infty$
 b) Montrer que $\mathcal{C}$ admet une asymptote oblique Δ dont on donnera une équation
 c) Préciser la position relative de $\mathcal{C}$ et Δ

Exercice 22

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{3x}{x^2 - 1}$

- 1) Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f
- 2) Montrer que f est une fonction impaire
- 3) Vérifier que $\Delta: x = 1$ est une asymptote verticale à la courbe $\mathcal{C}_f$
- 4) Montrer que $\Delta': y = 0$ est une asymptote horizontale à la courbe $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$

Exercice 23

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{x^2}{2x - 4}$. On appelle $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni du repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

- 1) Déterminer l'ensemble de définition de f
- 2) Calculer les limites de f aux bornes de l'ensemble de définition et en déduire l'existence d'éventuelles asymptotes horizontales ou verticales
- 3) Soit D la droite d'équation $y = \frac{1}{2}x + 1$
 a) Montrer que D est une asymptote pour la courbe $\mathcal{C}$
 b) Etudier la position relative de D et $\mathcal{C}$

Exercice 24

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ par $f(x) = ax + b + \frac{1}{2-x}$ où a et b sont deux réels. $\mathcal{C}$ est la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

- 1) a) Déterminer a et b pour que $\mathcal{C}$ passe par les points $A(1,3)$ et $B(3,3)$.
 b) Vérifier que $f(x) = \frac{x^2 - x - 3}{x - 2}$ pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$
- 2) a) Démontrer que la droite $\mathcal{G}_1$ d'équation $y = x + 1$ est asymptote à $\mathcal{C}$
 b) Etudier la position de $\mathcal{C}$ par rapport à $\mathcal{G}_1$
- 3) Etudier la limite de f en 2 et en déduire que $\mathcal{C}$ admet une deuxième asymptote $\mathcal{G}_2$ qu'on déterminera

Exercice 1

Pour que f possède des limites finies respectivement en 1 et en 2 il faut que l'expression $x^4 - 2x^3 + ax + b$ soit factorisable par $(x-1)$ et par $(x-2)$ c'est à dire 1 et 2 doivent être des racines de cette expression :

$$1 - 2 + a + b = a + b - 1 = 0 \text{ et } 16 - 2 \times 8 + 2a + b = 2a + b = 0$$

$$\begin{cases} a + b = 1 \\ 2a + b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 1 \\ a + (a + b) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 1 \\ a + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 1 \\ a = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 2 \\ a = -1 \end{cases}$$

$$\text{donc } x^4 - 2x^3 + ax + b = x^4 - 2x^3 - x + 2 = (x-2)(x^3 - 1) = (x-2)(x-1)(x^2 + x + 1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x-2)(x^2 + x + 1)}{(x-1)(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 1} (x^2 + x + 1) = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-1)(x-2)(x^2 + x + 1)}{(x-1)(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + x + 1) = 7$$

Exercice 2

$$1) \text{ On a pour } 0 \leq x < 1, f(x) = \frac{\sqrt{x}-1}{x-1} = \frac{\sqrt{x}-1}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} = \frac{1}{\sqrt{x}+1}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{\sqrt{x}+1} = \frac{1}{2} = f(1) \text{ donc } f \text{ est continue à gauche en } 1$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - x}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x(x-1)}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x}{x+1} = \frac{1}{2} = f(1) \text{ donc } f \text{ est continue à droite en } 1$$

4) • La fonction f est continue à gauche et à droite en 1 donc f est continue en 1

• La fonction f est continue sur $]1, +\infty[$ comme étant fonction rationnelle

• La fonction f est continue sur $]0, 1[$ comme étant quotient de deux fonctions continues

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x}-1}{x-1} = 1 = f(0) \text{ donc } f \text{ est continue à droite en } 0$$

$\Rightarrow f$ est continue sur $[0, +\infty[$

Exercice 3

$$1) \lim_{x \rightarrow 2^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} 3x - 2 = 4 = g(2) \text{ donc } g \text{ est continue à droite en } 2$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 2^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} -x^2 = -4 \neq g(2) \text{ donc } g \text{ n'est pas continue à gauche en } 2$$

3) • La fonction g est continue sur $]-\infty, 2[$ et sur $]2, +\infty[$ comme étant une fonction polynôme sur chaque intervalle donc $|g|$ est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$

• g est continue à droite en 2 donc $|g|$ est continue à droite en 2

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 2^-} |g(x)| = |-4| = 4 = |g(2)| \text{ donc } |g| \text{ est continue à gauche en } 2$$

$\Rightarrow g$ est continue sur $\mathbb{R}$

Exercice 4

1) • La fonction $x \mapsto \sqrt{2x-1}$ est continue sur $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right[$ comme étant racine d'une fonction continue et positive, la fonction $x \mapsto -\frac{1}{2}x$ est continue sur $\mathbb{R}$ donc la fonction f est continue sur $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right[$ comme étant somme de fonctions continues sur cette intervalle

$$\bullet \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} \sqrt{2x-1} - \frac{1}{2}x = -\frac{1}{4} = f\left(\frac{1}{2}\right) \text{ donc } f \text{ est continue à droite en } \frac{1}{2}$$

$\Rightarrow f$ est continue sur $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right[$

2) La fonction f est continue sur $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right[$ donc elle est continue sur $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ et on a $f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4}$ et $f(1) = \frac{1}{2}$

$\left(f\left(\frac{1}{2}\right) \leq 0 \leq f(1)\right)$ donc l'équation $f(x) = 0$ possède au moins une solution $\alpha \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$

3) $f(0.6) = 0.147$ donc $\alpha \in \left[\frac{1}{2}, 0.6\right]$ et par suite 0,6 est une valeur approchée par excès de α à 0,1 près

Exercice 5

1) $x^2 + x - 2 = (x-1)(x+2)$

$D_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$

2) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+2}{x^2+x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+2}{(x-1)(x+2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x-1} = 1$ donc f est prolongeable par continuité en 2

3) a) $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \sqrt{x^2+4} - x = \sqrt{5} + 1 = f(-1)$ donc f est continue à droite en -1

b) $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x+2}{x^2+x-2} = -\frac{1}{2} \neq f(-1)$ donc f n'est pas continue à gauche en -1

c) f n'est pas continue en -1 **Exercice 6**

A) 1) $D_f = [-2, 0[\cup]0, +\infty[$

2) La fonction $x \mapsto 2 - \sqrt{2x+4}$ est continue sur $[-2, +\infty[$ comme étant somme et racine de fonctions continues et par suite f est continue sur D_f comme étant quotient de deux fonction continues sur ce domaine

3) $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{2 - \sqrt{2x+4}}{x} = -1$

4) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 - \sqrt{2x+4}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(2 - \sqrt{2x+4})(2 + \sqrt{2x+4})}{x(2 + \sqrt{2x+4})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2}{(2 + \sqrt{2x+4})} = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}$ donc f est prolongeable par continuité en 0

B) 1) $2x^2 - 4x - 6 = 0 \quad 2 - (-4) + (-6) = 0$ donc $x_1 = -1$ et $x_2 = 3 \quad S_{R1} = \{-1, 3\}$

$D_g = \mathbb{R}$

2) $\lim_{x \rightarrow -2^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{3x^3 + 6x^2}{2x^2 - 4x - 6} = 0$

3) $\lim_{x \rightarrow -2^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = -1 \neq \lim_{x \rightarrow -2^-} g(x)$ donc g ne possède pas de limite en -2 et par suite g n'est pas continue en -2

4) $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\frac{1}{2}$ et $f(0) = m$ donc si $m = -\frac{1}{2}$ alors g est continue en 0

5) La fonction g est continue sur $]-\infty, -2[$ comme étant une fonction rationnelle

• Si $m = -\frac{1}{2}$ alors g est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$

• Si $m \neq -\frac{1}{2}$ alors g est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{-\frac{1}{2}, 0\}$

Exercice 71) La fonction f est continue sur $]-\infty, -1[$ comme étant une fonction polynôme et elle est continue sur $]1, +\infty[$ comme étant racine d'une fonction continue et positive

$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} x^4 - 4x^2 + 1 = -2 = f(1)$ donc f est continue à droite en 1 et par suite f est continue sur $]1, +\infty[$

2) a) $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \sqrt{x^2-1} = 0 \neq f(-1)$ donc f n'est pas continue à gauche en -1 et par suite f n'est pas continue en -1

b) Le domaine de continuité de f est $D_c = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ 3) a) • La fonction f est continue sur $[-1, 0]$

• $f(-1) = -2$ et $f(0) = 1$ donc $f(-1) \leq 0 \leq f(0)$

 $\Rightarrow$ l'équation $f(x) = 0$ possède aux moins une solution $\alpha \in]-1, 0[$

b) $f(-0,6) = -0,31$ et $f(-0,5) = 0,06$ donc $-0,6 < \alpha < -0,5$

Une valeur approchées par excès à 0,1 près de α est $-0,5$ **Exercice 8**

1) $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2-4}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} x+2 = 4$

$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x-2}{\sqrt{x+2}-2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(x-2)(\sqrt{x+2}+2)}{(\sqrt{x+2}-2)(\sqrt{x+2}+2)} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(x-2)(\sqrt{x+2}+2)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \sqrt{x+2}+2 = 4$

- 2) $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$ donc f possède une limite en 2 et on a $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 4$
 3) La fonction f possède une limite finie en 2 donc elle est prolongeable par continuité en 2

Exercice 9

- 1) a) $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x-2}{1+x^2} = -2$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} 2x^2 - 5x - 2 = -2$
 b) On a $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -2 = f(0)$ donc f est continue à droite et à gauche en 0 et par suite f est continue en 0
 2) $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} 2x^2 - 5x - 2 = 1 = f(3)$ donc f est continue à gauche en 3
 $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{2x^3 - 7x + 1}{x^2 - 3} = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{2x^3 - 7x + 1}{x^2 - 3} = +\infty$ donc f n'est pas continue à droite en 3 et par suite f n'est pas continue en 3
 3) La fonction f est
- continue sur $]-\infty, 0[$ comme étant une fonction rationnelle
 - continue en 0
 - continue sur $]0, 3[$ comme étant une fonction polynôme
 - continue sur $]3, +\infty[$ comme étant une fonction rationnelle
- $\Rightarrow$ Le domaine de continuité de f est $]-\infty, 3[\cup]3, +\infty[$

Exercice 10

- 1) $\lim_{x \rightarrow -3} g(x) = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{2x^2 + 4x - 6}{x + 3} = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{2(x+3)(x-1)}{x+3} = \lim_{x \rightarrow -3} 2(x-1) = -8$ donc g est prolongeable par continuité en -3 et son prolongement est $\begin{cases} G(x) = g(x) & \text{si } x \neq -3 \\ G(-3) = -8 \end{cases}$
 2) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} x + \sqrt{x-2} & \text{si } x \geq 2 \\ g(x) & \text{si } x < 2 \text{ et } x \neq -3 \\ -8 & \text{si } x = -3 \end{cases}$
 a) $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{2x^2 + 4x - 6}{x + 3} = 2$
 $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} x + \sqrt{x-2} = 2$
 $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 2 = f(2)$ donc f est continue en 2
 b) $\lim_{x \rightarrow -3} f(x) = \lim_{x \rightarrow -3} g(x) = -8 = f(-3)$ donc f est continue en -3 d'autre part :
 - f est continue en 2
 - f est continue sur $]2, +\infty[$ comme étant somme et racine de fonctions continues
 - f est continue sur $]-\infty, -3[\cup]-3, 2[$ comme étant fonction rationnelle $\Rightarrow$ La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$
 c) • La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ donc elle est continue sur $[2, 3]$
 • $f(2) = 2$ et $f(3) = -8$ donc f change de signe sur $[2, 3]$
 $\Rightarrow$ L'équation $f(x) = 3$ possède au moins une solution dans $[2, 3]$

Exercice 11

- 1) a) $\lim_{x \rightarrow -1^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{1}{\sqrt{x+1}+1} = 1 = f(1)$ donc g est continue à droite en -1 de plus g est continue sur $]-1, +\infty[$ comme étant inverse et racine de fonctions continues donc g est continue sur $[-1, +\infty[$
 b) $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x+1}+1} = \frac{1}{2}$
 2) a) $Df = [-1, +\infty[\setminus \{0\} = [-1, 0[\cup]0, +\infty[$
 b) On a pour tout $x \in Df$, $f(x) = \frac{\sqrt{x+1}-1}{x} = \frac{(\sqrt{x+1}-1)(\sqrt{x+1}+1)}{x(\sqrt{x+1}+1)} = \frac{x}{x(\sqrt{x+1}+1)} = \frac{1}{\sqrt{x+1}+1} = g(x)$
 c) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \frac{1}{2}$ donc f est prolongeable par continuité en 0

Exercice 12

- 1) a)
- $P(x) = x^3 + 3x^2 - 10x - 30$
- s'annule en
- -3
- donc
- $P(x)$
- est factorisable par
- $(x + 3)$

$$P(x) = (x + 3)(x^2 + ax + b) = x^3 + ax^2 + bx + 3x^2 + 3ax + 3b = x^3 + (a + 3)x^2 + (b + 3a)x + 3b$$

$$\text{Donc } \begin{cases} a + 3 = 3 \\ b + 3a = -10 \\ 3b = -30 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = -10 \end{cases} \text{ donc } P(x) = (x + 3)(x^2 - 10)$$

$$\text{On a pour tout } x < -3, f(x) = \frac{x^3 + 3x^2 - 10x - 30}{x + 3} = \frac{(x + 3)(x^2 - 10)}{(x + 3)} = x^2 - 10$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow -3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -3^-} \frac{x^3 + 3x^2 - 10x - 30}{x + 3} = \lim_{x \rightarrow -3^-} x^2 - 10 = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow -3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -3^+} x\sqrt{x+3} - 1 = -1$$

$$\text{Donc } \lim_{x \rightarrow -3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -3^+} f(x) = -1 \text{ donc } \lim_{x \rightarrow -3} f(x) = -1 = f(-3) \text{ donc } f \text{ est continue en } -3$$

- c) La fonction
- f
- est :

- continue en -3
 - continue sur $]-\infty, -3[$ comme étant une fonction rationnelle
 - continue sur $]-3, +\infty[$ comme étant produit et racine de fonctions continues
- $\Rightarrow$ la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$

- 2) a) Soit
- h
- la fonction définie sur
- $\mathbb{R}$
- par
- $h(x) = f(x) - x$

- h est continue sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions continues donc h est continue sur $[-3, 0]$
- $h(-3) = f(-3) + 3 = -1 + 3 = 2$ et $h(0) = f(0) = -1$ donc h change de signe sur $[-3, 0]$

$\Rightarrow$ L'équation $h(x) = 0$ possède au moins une solution α dans $[-3, 0]$

$$h(\alpha) = 0 \Leftrightarrow f(\alpha) - \alpha = 0 \Leftrightarrow f(\alpha) = \alpha \text{ Montrer que l'équation } f(x) = x \text{ admet dans } [-3, 0] \text{ au moins une solution } \alpha$$

$$\text{b) } f(\alpha) = \alpha\sqrt{\alpha+3} - 1 = \alpha \Leftrightarrow \alpha\sqrt{\alpha+3} = \alpha + 1 \text{ donc } \alpha^2(\alpha+3) = (\alpha+1)^2 \text{ donc } \alpha^3 + 3\alpha^2 = \alpha^2 + 2\alpha + 1 \text{ ou encore } \alpha^3 + 2\alpha^2 - 2\alpha - 1 = 0 \text{ donc } \alpha \text{ est une solution de l'équation : } x^3 + 2x^2 - 2x - 1 = 0$$

Exercice 13

$$1) \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x-1} = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 + 2x + 1 = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty$$

$$2) \text{ a) } \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} a + \sqrt{1-x^2} = a \text{ et } \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} x^2 + 2x + 1 = 0$$

$$\text{b) } f \text{ possède une limite en } -1 \text{ si et seulement si } \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) \text{ donc pour } a = 0$$

$$\text{c) Pour } a = 0 \text{ on a } \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 0 = f(-1) \text{ donc } f \text{ est continue en } -1$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \sqrt{x-1} = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} a + \sqrt{1-x^2} = a \text{ donc } f \text{ possède une limite en } 1 \text{ si, et seulement si, } a = 0 \text{ et on a dans ce cas } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0 = f(1) \text{ et par suite } f \text{ est continue pour } a = 0$$

Exercice 14

$$1) \lim_{x \rightarrow -3} f(x) = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 + 2x - 3}{x + 3} = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{(x+3)(x-1)}{x+3} = \lim_{x \rightarrow -3} (x-1) = -4 \text{ donc } f \text{ est prolongeable par continuité en } -3$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} = +\infty. \text{ Donc la droite } x = 0 \text{ (l'axe des ordonnées) est une asymptote à } \mathbb{R}$$

$$3) \text{ a) On a pour tout } x > 0, f(x) = \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} = \frac{\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2}} = \sqrt{\frac{x^2+1}{x^2}}$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2+1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1 \text{ donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{x^2+1}{x^2}} = 1 \text{ donc la droite d'équation } y = 1 \text{ est une asymptote horizontale à la courbe } \mathbb{R} \text{ au voisinage de } +\infty$$

$$4) \text{ a) } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 2x - 3}{x + 3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (x-1)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 2x - 3}{x + 3} - (x-1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x-1)(x+3)}{x+3} - (x-1) = 0 \text{ donc la droite}$$

$$\Delta: y = x - 1 \text{ est une asymptote oblique à } \mathbb{R} \text{ au voisinage de } +\infty$$

Exercice 15

1) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$

2) $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1-x^2}{|x-2|} = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1-x^2}{|x-2|} = -\infty$

3) $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -\infty$

Exercice 16

1) $x^2 + 3x - 4 = (x-1)(x+4)$ donc l'expression $\frac{x-1}{x^2+3x-4}$ existe sur $\mathbb{R} \setminus \{-4, 1\}$

2) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

3) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-1}{x^2+3x-4} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{-x+1} + x + a = +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x^2+3x-4} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\cancel{x-1}}{(\cancel{x-1})(x+4)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x+4} = \frac{1}{5}$$

4) a) $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x-1}{x^2+3x-4} = \frac{1}{4}$

b) $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \sqrt{-x+1} + x + a = 1+a$

c) f possède une limite en 0 si, et seulement si, $1+a = \frac{1}{4} \Leftrightarrow a = \frac{1}{4} - 1 = -\frac{3}{4}$

Exercice 17

1) $3x^2 - 8x + 4 = 0 \quad \Delta = (-8)^2 - 4 \times 3 \times 4 = 16$ donc $x = \frac{8+4}{6} = 2$ ou bien $x = \frac{8-4}{6} = \frac{2}{3}$

$D_f = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{2}{3} \right\}$

2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x-2)^2}{3x^2-8x+4} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2-4x+4}{3x^2-8x+4} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{3x^2} = \frac{1}{3}$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2+5} - x - 1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2+5} - (x+1))(\sqrt{x^2+5} + (x+1))}{(\sqrt{x^2+5} + (x+1))} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2+5 - (x+1)^2}{\sqrt{x^2+5} + x + 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x+6}{\sqrt{x^2+5} + x + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x(-2+\frac{6}{x})}{x(\sqrt{1+\frac{5}{x^2}} + 1 + \frac{1}{x})} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(-2+\frac{6}{x})}{(\sqrt{1+\frac{5}{x^2}} + 1 + \frac{1}{x})} \\ &= -1 \end{aligned}$$

3) a) $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{(x-2)^2}{3x^2-8x+4} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{(x-2)^2}{3(x-2)(x-\frac{2}{3})} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{(x-2)}{3(x-\frac{2}{3})} = 0 = f(2)$ donc f est continue à

gauche en 2

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \sqrt{x^2+5} - x - 1 = 0 = f(2)$$
 donc f est continue à droite en 2

 $\Rightarrow f$ est continue en 2b) La fonction f est :

- continue en 2
- continue sur $]2, +\infty[$ comme étant racine et somme de fonctions continues

- continue sur $]-\infty, \frac{2}{3}[\cup]\frac{2}{3}, 2[$ comme étant fonction rationnelle

$$\Rightarrow f \text{ est continue sur }]-\infty, \frac{2}{3}[\cup]\frac{2}{3}, +\infty[$$

Exercice 18

1) $D_f = [2, +\infty[$

2) a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x-2} = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \sqrt{x-2} = 0$

b) f ne possède pas de limite en $-\infty$ car elle n'est pas définie au voisinage de $-\infty$

3) a) $x^2 - x - 2 = 0 \quad \Delta = (-1)^2 - 4 \times (-2) = 9$ donc $x = \frac{1-3}{2} = -1$ ou bien $x = \frac{1+3}{2} = 2$

$D_g =]2, +\infty[$

$$b) \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x-2}}{x^2 - x - 2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x-2}}{(x+1)(x-2)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{(x+1)\sqrt{x-2}} = 0$$

$$c) \lim_{x \rightarrow -2^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{\sqrt{x-2}}{x^2 - x - 2} = \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{\sqrt{x-2}}{(x+1)(x-2)} = \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{1}{(x+1)\sqrt{x-2}} = +\infty$$

g ne possède pas de limite en 2 car elle ne possède pas de limite à gauche en 2 (elle n'est pas définie)

Exercice 19

$$1) D_f = \mathbb{R}^* =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$$

$$2) \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x+1}-1}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x+1}-1)(\sqrt{x+1}+1)}{x(\sqrt{x+1}+1)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{(\sqrt{x+1}+1)} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 2x - 3}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$$

$$3) a) \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{\sqrt{x+1}-1}{x} = -1 \text{ et } \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x^2 + 2x - 3}{x - 1} = +\infty \neq \lim_{x \rightarrow -1} f(x) \text{ donc } f \text{ ne possède pas de limite en } -1$$

b) f ne possède pas de limite en -1 donc elle n'est pas continue en -1

$$4) \bullet \text{ La fonction } f \text{ est continue sur }]-1, 0[\cup]0, +\infty[\text{ comme étant somme et quotient et racine de fonctions continues}$$

$\bullet$ La fonction f est continue sur $]-\infty, -1[$ comme étant fonction rationnelle

$\Rightarrow$ f est continue sur $]-\infty, -1[\cup]-1, 0[\cup]0, +\infty[$

$$5) \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1}-1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x+1}-1)(\sqrt{x+1}+1)}{x(\sqrt{x+1}+1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{(\sqrt{x+1}+1)} = \frac{1}{2} \text{ donc } f \text{ est prolongeable par}$$

$$\text{continuité en 0 et son prolongement par continuité est } \begin{cases} F(x) = f(x) & \text{si } x \neq 0 \\ F(0) = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Exercice 20

$$1) a) D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^2 - 2x - 2}{x + 1} = -\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x^2 - 2x - 2}{x + 1} = +\infty \text{ donc la droite d'équation } x = -1 \text{ est une asymptote à la courbe } \mathcal{C}$$

$$2) a) ax + b + \frac{c}{x+1} = \frac{(ax+b)(x+1)+c}{x+1} = \frac{ax^2 + ax + bx + b + c}{x+1} = \frac{ax^2 + (a+b)x + b+c}{x+1} = \frac{x^2 - 2x - 2}{x+1}$$

$$\begin{cases} a = 1 \\ a + b = -2 \\ b + c = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -3 \\ c = 1 \end{cases} \text{ donc } f(x) = x - 3 + \frac{1}{x+1} \text{ pour tout } x \neq -1$$

$$b) \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 2x - 2}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 2x - 2}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$$

$$c) f(x) - (x - 3) = \frac{1}{x+1} \text{ pour tout } x \neq -1$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (x - 3)] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x+1} = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x - 3)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x+1} = 0 \text{ donc la droite}$$

$\mathcal{D}: y = x - 3$ est une asymptote oblique pour $\mathcal{C}$ au voisinage de $+\infty$ et $-\infty$

d)

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f(x) - (x - 3) = \frac{1}{x+1}$	-		+
Position relative	$\mathcal{C}$ au-dessous de $\mathcal{D}$		$\mathcal{C}$ au-dessus de $\mathcal{D}$

Exercice 21

$$1) D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$$

$$2) \text{ On a pour tout } x \in D_f, \quad x + 1 + \frac{x}{x^2 - 1} = \frac{(x+1)(x^2 - 1) + x}{x^2 - 1} = \frac{x^3 - x + x^2 - 1 + x}{x^2 - 1} = \frac{x^3 + x^2 - 1}{x^2 - 1} = f(x)$$

$$3) \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x + 1 + \frac{x}{x^2 - 1} = -\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x + 1 + \frac{x}{x^2 - 1} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x + 1 + \frac{x}{x^2 - 1} = -\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x + 1 + \frac{x}{x^2 - 1} = +\infty$$

Les droites d'équations $x = -1$ et $x = 1$ sont deux asymptotes verticale à la courbe 'C'.

$$4) a) \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 + x^2 - 1}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + x^2 - 1}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$$

$$b) \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - (x + 1) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - (x + 1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

Donc la droite $\Delta: y = x + 1$ est une asymptote oblique à 'C' au voisinage de $+\infty$ et $-\infty$.

c)

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
x	-	-	0	+	+
$x^2 - 1$	+	0	-	0	+
$\frac{x}{x^2 - 1}$	-	+	0	-	+
Position relative	'C' au-dessous de Δ	'C' au-dessus de Δ	'C' au-dessous de Δ	'C' au-dessus de Δ	'C' au-dessus de Δ

Exercice 22

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{3x}{x^2 - 1}$

$$1) D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$$

$$2) \text{ Soit } x \in D_f \text{ donc } x \neq 1 \text{ et } x \neq -1 \text{ donc } -x \neq -1 \text{ et } -x \neq 1 \text{ et par suite } -x \in D_f$$

$$\text{On a pour tout } x \in D_f, f(-x) = \frac{-3x}{(-x)^2 - 1} = \frac{-3x}{x^2 - 1} = -f(x) \text{ donc } f \text{ est impaire}$$

$$3) \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{3x}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{3x}{(x-1)(x+1)} = -\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{3x}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{3x}{(x-1)(x+1)} = +\infty \text{ donc la droite } \Delta: x = 1 \text{ est une asymptote verticale à la courbe 'C'}$$

$$4) \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{3x}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{3x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{3}{x} = 0 \text{ donc la droite } \Delta': y = 0 \text{ est une asymptote horizontale à la courbe 'C' en } +\infty$$

Exercice 23

$$1) D_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$$

$$2) \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{2x - 4} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{2x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{2} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{2x - 4} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{2} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2}{2x - 4} = -\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2}{2x - 4} = +\infty \text{ donc la droite } \Delta: x = 2 \text{ est une asymptote verticale à la courbe 'C'}$$

$$3) a) f(x) - \left(\frac{1}{2}x + 1\right) = \frac{x^2}{2x - 4} - \left(\frac{1}{2}x + 1\right) = \frac{x^2 - 4\left(\frac{1}{2}x + 1\right)\left(\frac{1}{2}x + 1\right)}{2x - 4} = \frac{4}{2x - 4} = \frac{2}{x - 2}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(f(x) - \left(\frac{1}{2}x + 1\right)\right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{x - 2} = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(f(x) - \left(\frac{1}{2}x + 1\right)\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x - 2} = 0 \text{ donc la droite}$$

$D: y = \frac{1}{2}x + 1$ est une asymptote oblique à la courbe 'C' aux voisinages de $+\infty$ et $-\infty$

b)

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f(x) - \left(\frac{1}{2}x + 1\right) = \frac{2}{x - 2}$	-	+	
Position relative	'C' au-dessous de Δ	'C' au-dessus de Δ	

Exercice 24

$f(x) = ax + b + \frac{1}{2-x}$ où a et b sont deux réels. $\mathcal{C}$ est la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

1) a) $A \in \mathcal{C} \Leftrightarrow f(1) = 3 \Leftrightarrow a + b + 1 = 3 \Leftrightarrow a + b = 2$

$B \in \mathcal{C} \Leftrightarrow f(3) = 3 \Leftrightarrow 3a + b - 1 = 3 \Leftrightarrow 3a + b = 4$

$\begin{cases} a + b = 2 \\ 3a + b = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 2 \\ 2a = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a + b = 2 \\ a = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 1 \\ a = 1 \end{cases}$ donc $f(x) = x + 1 + \frac{1}{2-x}$

b) $f(x) = x + 1 + \frac{1}{2-x} = \frac{(x+1)(2-x)+1}{2-x} = \frac{-x^2+x+3}{2-x} = \frac{x^2-x-3}{x-2}$ pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$

2) a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - (x+1)) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{2-x} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (x+1)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2-x} = 0$ donc la droite $\mathcal{D}_1$ d'équation $y = x + 1$ est asymptote à $\mathcal{C}$ aux voisinages de $-\infty$ et de $+\infty$

b) $f(x) - (x+1) = \frac{1}{2-x}$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f(x) - (x+1)$	+		-
Position relative de	$\mathcal{C}$ au-dessus de $\mathcal{D}_1$		$\mathcal{C}$ au-dessous de $\mathcal{D}_1$

3) $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} x + 1 + \frac{1}{2-x} = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} x + 1 + \frac{1}{2-x} = +\infty$ donc la droite $\mathcal{D}_2: x = 2$ est une asymptote à $\mathcal{C}$