

Chapitre III

Limites et continuité

■ Limites finies en un réel :

soit f définie sur un intervalle ouvert I sauf peut être en a de I ..

1) Définition : $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ signifie que :

$\forall \beta > 0$, il existe un $\alpha > 0$ tel que pour tout $x \in I$

$$0 < |x - a| < \alpha \Rightarrow |f(x) - L| < \beta.$$

2) Théorème : Si f admet une limite en a alors cette limite est unique.

• Notation : $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_a f = L$

3) Limite à droite – limite à gauche en un réel.

Limite à droite en a	Limite à gauche en a
f définie sur $I = [a, b[$ ou $]a, b[$	f définie sur $I =]c, a]$ ou $]c, a[$
$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L$ signifie que	$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L$ signifie que
$\forall \beta > 0$ il existe $\alpha > 0$ tel que	$\forall \beta > 0$, il existe $\alpha > 0$ tel que
$\forall x \in I, 0 < x - a < \alpha \Rightarrow f(x) - L < \beta$	$\forall x \in I, 0 < a - x < \alpha \Rightarrow f(x) - L < \beta$

• Théorème : $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$

• Exemples :
$$\begin{cases} f(x) = x + 1 & \text{si } x \geq 1 \\ f(x) = \frac{5 - x}{x + 1} & \text{si } x < 1 \end{cases}$$

Déterminer $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$?

$$* \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} x + 1 = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{5 - x}{x + 1} = \frac{4}{2} = 2$$

$$\text{d'où } \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 2$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$$

• conséquence : Si $\lim_{x \rightarrow a^+} f \neq \lim_{x \rightarrow a^-} f$ alors $\lim_a f$ n'existe pas.

4) Opérations sur les limites finies :

$\lim_{x \rightarrow a} f$	$\lim_{x \rightarrow a} g$	$\lim_{x \rightarrow a} f+g$	$\lim_{x \rightarrow a} f \times g$	$\lim_{x \rightarrow a} \alpha f$	$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f}{g}$
L	L'	L + L'	L × L'	α . L	$\frac{L}{L'}$ si L' ≠ 0

- Remarque : si on se retrouve avec $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f}{g} = \frac{0}{0}$ c'est une forme indéterminée il faut alors simplifier l'écriture pour calculer cette limite.

5) Théorèmes : 1) $f(x) \geq 0$ et $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \Rightarrow L \geq 0$

2) $f(x) \leq 0$ et $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \Rightarrow L \leq 0$

3) $f(x) \geq 0$ et $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} \sqrt{f(x)} = \sqrt{L}$

■ Continuité en un point x_0 :

• **Définition** : soit I un intervalle centré en x_0 et $I \subset D_f$.

f est continue en $x_0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

• **Continue à droite et à gauche** : ($x_0 \in D_f$)

* f est continue à droite en $x_0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0)$.

* f est continue à gauche en $x_0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0)$.

* f est continue en $x_0 \Leftrightarrow$ f est continue à droite et à gauche en x_0 .

■ Continuité sur un intervalle :

• f est continue sur $]a, b[\Leftrightarrow$ f est continue en tout point $x_0 \in]a, b[$.

• f est continue sur $[a, b[\Leftrightarrow$ f est continue sur $]a, b[$ et à droite en a.

• f est continue sur $]a, b] \Leftrightarrow$ f est continue sur $]a, b[$ et à gauche en b.

■ Opérations sur les fonctions continues :

• Toute fonction polynôme est continue sur $\mathbb{R}$.

• Toute fonction rationnelle est continue sur son domaine de définition.

• $x \mapsto \sqrt{x}$ est continue sur $[0, +\infty[$.

• f est continue sur I et positif $\Rightarrow \sqrt{f}$ est continue sur I.

• f est continue sur I $\Rightarrow |f|$ est continue sur I.

• Soient f et g deux fonctions continues sur I, $\alpha \in \mathbb{R}$

Alors $f + g$; $f \times g$; αf sont continue sur I.

Si de plus $g(x) \neq 0$ alors $\frac{f}{g}$ est continue sur I.

■ **Théorème et définition : prolongement par continuité :**
 f définie sur un intervalle ouvert I sauf en a de I et $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$

Alors la fonction g définie sur I par :

$$\begin{cases} g(x) = f(x) & \text{si } x \neq a \\ g(a) = L \end{cases}$$

On dit que g est le **prolongement par continuité** en a de la fonction f .

Exemple : Déterminer g le prolongement par continuité de f .

* $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ définie sur $\mathbb{R} - \{1\}$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} x + 1 = 2$$

On considère g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = f(x)$ si $x \neq 1$ et $g(1) = 2$.

Réflexes :

	Situations	Réflexes
1	Comment étudier la continuité d'une fonction définie par intervalles	On étudie la fonction sur chaque intervalle puis on fait une étude particulière de la continuité aux valeurs aux bornes des intervalles (dans D_f)
2	Comment calculer une limite si on se retrouve avec la forme $\frac{0}{0}$	• Simplifier l'expression puis remplacer le x par sa valeur. • Si f comporte des $\sqrt{\quad}$ il faut multiplier et diviser par l'expression conjuguée où factoriser
3	Comment calculer une limite (dans le cas $\neq \frac{0}{0}$)	• En remplaçant le x par sa valeur dans l'expression. • En utilise les opérations sur les limites.