

Chapitre III

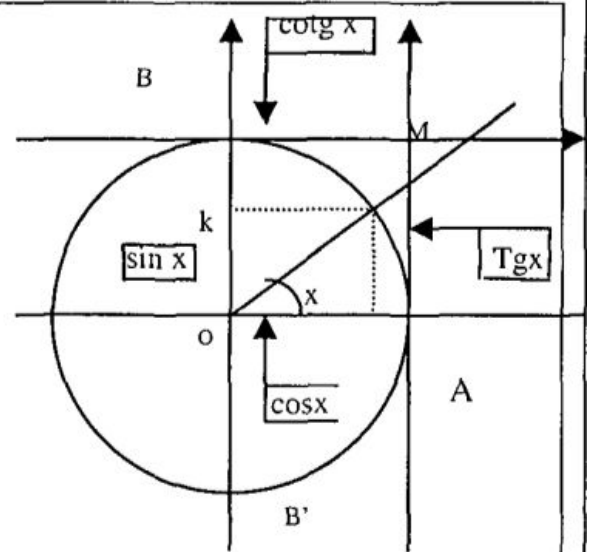
Trigonométrie

Définitions :

ζ désigne un cercle Trigonométrique de centre O, $(O, \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$, un repère orthonormé direct.

Soit x un réel et M un point de ζ , tel que $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM}) \equiv x(2\pi)$. On appelle :

- $\cos x$, l'abscisse de M donc $\cos x = \overline{OH}$.
- $\sin x$, l'ordonnée de M donc $\sin x = \overline{OK}$.
- $\operatorname{tg} x$, le quotient de $\sin x$ par $\cos x$ donc $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} = \overline{AL}$.
- $\operatorname{cotg} x$, le quotient de $\cos x$ par $\sin x$ donc $\operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\sin x} = \overline{BN}$.



Valeurs remarquables :

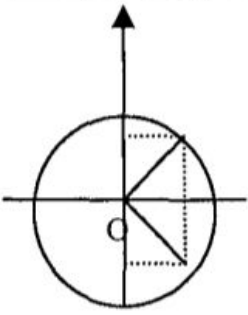
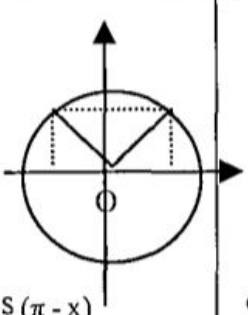
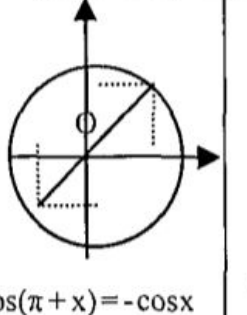
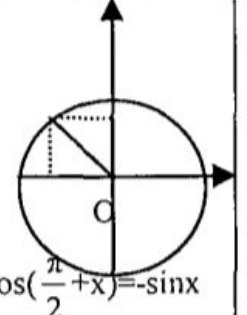
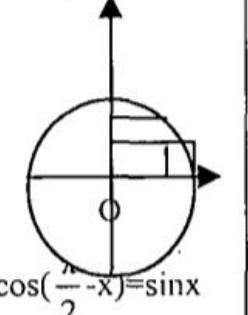
En degrés	0	30	45	60	90
En radians	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
Sin x	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
Cos x	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
tg	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	

Relations entre les fonctions trigonométriques :

- Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$.
- Pour tout $x \in \mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$; $1 + \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$.
- Pour tout $x \in \mathbb{R} - \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$; $1 + \operatorname{cotg}^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}$.

- Pour tout $x \in \mathbb{R}$; $-1 \leq \cos x \leq 1$ et $-1 \leq \sin x \leq 1$.
- Pour tout $x \in \mathbb{R}$; $\cos(x + 2k\pi) = \cos x$ et $\sin(x + 2k\pi) = \sin x$.
- Pour tout $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$; $\operatorname{tg}(x + k\pi) = \operatorname{tg} x$.
- Pour tout $x \neq k\pi$; $\operatorname{cotg}(x + k\pi) = \operatorname{cotg} x$.

■ **Formules des « Angles associés » :**

 $\cos(-x) = \cos x$ $\sin(-x) = -\sin x$ $\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x$ $\operatorname{cotg}(-x) = -\operatorname{cotg} x$	 $\cos(\pi - x) = -\cos x$ $\sin(\pi - x) = \sin x$ $\operatorname{tg}(\pi - x) = -\operatorname{tg} x$ $\operatorname{cotg}(\pi - x) = -\operatorname{cotg} x$	 $\cos(\pi + x) = -\cos x$ $\sin(\pi + x) = -\sin x$ $\operatorname{tg}(\pi + x) = \operatorname{tg} x$ $\operatorname{cotg}(\pi + x) = \operatorname{cotg} x$	 $\cos(\frac{\pi}{2} + x) = -\sin x$ $\sin(\frac{\pi}{2} + x) = \cos x$ $\operatorname{tg}(\frac{\pi}{2} + x) = -\operatorname{cotg} x$	 $\cos(\frac{\pi}{2} - x) = \sin x$ $\sin(\frac{\pi}{2} - x) = \cos x$ $\operatorname{tg}(\frac{\pi}{2} - x) = \operatorname{cotg} x$ $\operatorname{cotg}(\frac{\pi}{2} - x) = \operatorname{tg} x$
--	--	---	---	---

Remarque: La fonction $\cos$ est paire et la fonction $\sin$ est impaire.

■ **Les formules de transformation:**

$\cos(a + b) = \cos a \cdot \cos b - \sin a \cdot \sin b$	$\sin(a + b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$
$\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$	$\sin(a - b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a$
$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$	
$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2 \cos^2 x - 1 = 1 - 2 \sin^2 x$	

a et b réels tel que $(a, b) \neq (0, 0)$, pour tout x , on a :

$$a \cos x + b \sin x = r \cos(x - \varphi) \text{ avec } r = \sqrt{a^2 + b^2} \text{ et } \cos \varphi = \frac{a}{r} \text{ et } \sin \varphi = \frac{b}{r}.$$

■ **Les coordonnées polaires :**

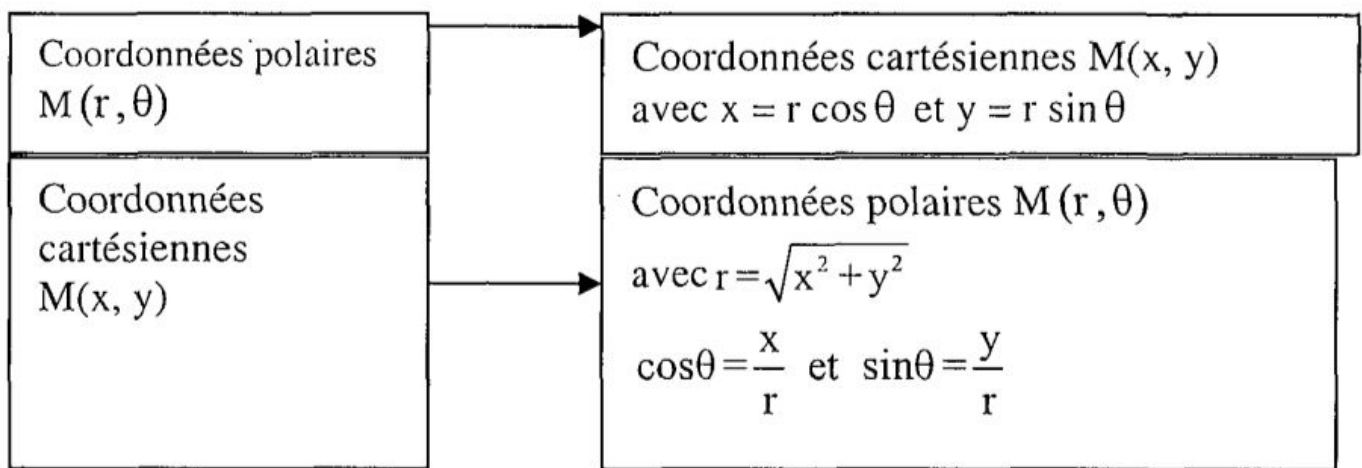
• **Définition :**

$(o, \vec{i}, \vec{j})$ repère orthonormé direct. Tout point M de coordonnées cartésiennes

(x, y) peut être repère par l'angle $\theta = (\vec{i}, \overrightarrow{OM})$ et $OM = r$

Le couple (r, θ) est appelé les coordonnées polaires de M .

• **Comment passer des coordonnées polaires aux cartésiennes et réciproquement ?**



Exemples :

- 1) Déterminer les coordonnées cartésiennes du point M ayant pour coordonnées polaires $\left(3, \frac{5\pi}{6}\right)$.
- 2) Déterminer les coordonnées polaires du point W ayant pour coordonnées cartésiennes $(\sqrt{3}, -3)$.

Solution : 1) $r = 3$ et $\theta = \frac{5\pi}{6}$ alors $x = r \cos \theta = 3 \cos \frac{5\pi}{6} = \frac{-3\sqrt{3}}{2}$

et $y = r \sin \theta = 3 \sin \frac{5\pi}{6} = \frac{3}{2}$

d'où les coordonnées cartésiennes de M sont $\left(\frac{-3\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2}\right)$.

2) $x = \sqrt{3}$ et $y = -3$ alors $r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{3 + 9} = 2\sqrt{3}$

$\cos \theta = \frac{x}{r} = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{2}$ et $\sin \theta = \frac{y}{r} = \frac{-3}{2\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ d'où $\theta = -\frac{\pi}{3}$

ainsi les coordonnées polaires de M sont $\left(2\sqrt{3}, -\frac{\pi}{3}\right)$.

• **Propriété :**

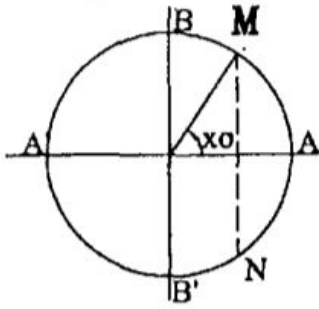
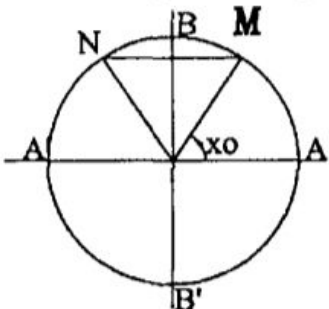
$\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{u}' \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ deux vecteurs non nuls dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$ direct

Alors $\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{xx' + yy'}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|}$ et $\sin(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{xx' - yy'}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|}$

■ Equations trigonométriques :

Equations	$\cos x = a$	$\sin x = a$	$\operatorname{tg} x = a$
Si $a \notin [-1, 1]$	Pas de solutions		des solutions
$a \in [-1, 1]$	Si x_0 est une solution particulière de l'équation $\cos x = a$ $\sin x = a$ $\operatorname{tg} x = a$		
Cela revient à résoudre les équations			
$\cos x = \cos x_0$		$\sin x = \sin x_0$	$\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} x_0$
Donc les solutions sont de la forme			
$x = x_0 + 2k\pi$ ou $x = -x_0 + 2k\pi$ $k \in \mathbb{Z}$	$x = x_0 + 2k\pi$ ou $x = \pi - x_0 + 2k\pi$ $k \in \mathbb{Z}$	$x = x_0 + k\pi$ $k \in \mathbb{Z}$	

■ Inéquations trigonométriques :

Inéquations	$\cos x \geq a$	$\sin x \geq a$
Si $a \in [-1, 1]$	Soit x_0 un réel tel que $\cos x_0 = a$ ou $\sin x_0 = a$ cela revient à résoudre les inéquations :	
	$\cos x \geq \cos x_0$ Soient N et M les points d'abscisse a. Les images des solutions sont situées sur l'arc $\widehat{MN}$ passant par A 	$\sin x \geq \sin x_0$ Soient M et N. Les points d'ordonnées a. Les images des solutions sont situées sur l'arc $\widehat{MN}$ passant par B. 
Donc les solutions sont de la forme :		
	$-x_0 + 2k\pi \leq x \leq x_0 + 2k\pi$ $k \in \mathbb{Z}$	$x_0 + 2k\pi \leq x \leq \pi - x_0 + 2k\pi$ $k \in \mathbb{Z}$

Même raisonnement pour $\cos x \leq a$, $\sin x \leq a$ et $\operatorname{tg} x \leq a$.