

Théorème

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell, \text{ si et seulement si, } \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \ell.$$

Théorème

- f est continue à gauche en a, si et seulement si, $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a)$.
- f est continue à droite en a, si et seulement si, $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$.
- f est continue en a, si et seulement si, $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$.

III/ Exemples de calculs de limite finie en un réel

Exemple 1

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{-x^2 + x + 2}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(-x-1)}{(x-2)(x+2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(-x-1)}{(x+2)} = \frac{-3}{4}.$$

Exemple 2

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2+3}-2x}{x^2-1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{x^2+3}-2x)(\sqrt{x^2+3}+2x)}{(x^2-1)(\sqrt{x^2+3}+2x)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2+3-4x^2}{(x^2-1)(\sqrt{x^2+3}+2x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-3(x^2-1)}{(x^2-1)(\sqrt{x^2+3}+2x)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-3}{(\sqrt{x^2+3}+2x)} = \frac{-3}{4}. \end{aligned}$$

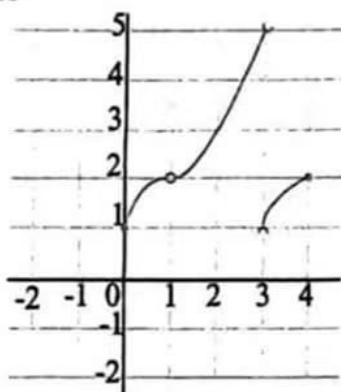
Exemple 3

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\sqrt{x+2}-x}{\sqrt{x^2-4}} &= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(\sqrt{x+2}-x)(\sqrt{x+2}+x)\sqrt{x^2-4}}{(x^2-4)(\sqrt{x+2}+x)} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(x+2-x^2)\sqrt{x^2-4}}{(x-2)(x+2)(\sqrt{x+2}+x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(x-2)(-x-1)\sqrt{x^2-4}}{(x-2)(x+2)(\sqrt{x+2}+x)} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(-x-1)\sqrt{x^2-4}}{(x+2)(\sqrt{x+2}+x)} = 0. \end{aligned}$$

Exemple 4

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\sqrt{x^2+3}-2}{\sqrt{1-x}} &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(\sqrt{x^2+3}-2)(\sqrt{x^2+3}+2)\sqrt{1-x}}{(1-x)(\sqrt{x^2+3}+2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(x^2-1)\sqrt{1-x}}{(1-x)(\sqrt{x^2+3}+2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(-x-1)\sqrt{1-x}}{(\sqrt{x^2+3}+2)} = 0. \end{aligned}$$

I/ Limite finie en un réel et continuité



- $D_f = [0, 4] \setminus \{1, 3\}$.
- $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$.
- $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ n'existe pas.
- $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 3$ et $f(2) = 3$.

Théorème

f est continue en a , si et seulement si, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

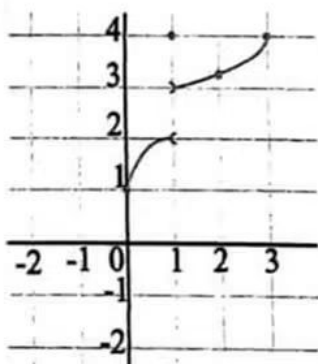
Théorème et définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I , sauf en un réel a de I .

Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$, on dit que la fonction f est prolongeable par continuité en a et la fonction g définie

sur I par $g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq a \\ L & \text{si } x = a \end{cases}$ est appelée le prolongement par continuité de f en a .

I/ Limite à gauche – Limite à droite



- $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 2$, $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 3$, $f(1) = 4$.
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1$, $f(0) = 1$.
- $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = 4$, $f(3) = 4$.
- $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = f(2)$.

Théorèmes

- Si f et g sont deux fonctions continues sur un intervalle I alors les fonctions $f + g$, $f \times g$, f^n ($n \in \mathbb{N}^*$) et αf ($\alpha \in \mathbb{R}$) sont continues sur I .
- Si f est une fonction continue sur un intervalle I et pour tout $x \in I$, $f(x) \neq 0$ alors la fonction $\frac{1}{f}$ est continue sur I .
- Si f et g sont deux fonctions continues sur un intervalle I et pour tout $x \in I$, $g(x) \neq 0$ alors la fonction $\frac{f}{g}$ est continue sur I .

III/ Image d'un intervalle par une fonction

Définition

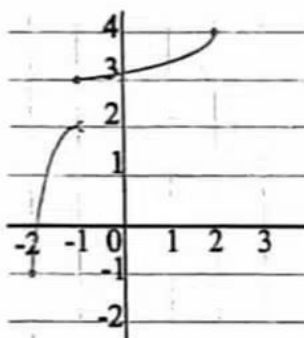
Soit f une fonction définie sur une partie D de $\mathbb{R}$ et A une partie de D .

L'ensemble des réels $f(x)$ tels que x appartient à A est noté $f(A)$.

Autrement dit $f(A) = \{f(x) \text{ tel que } x \in A\}$.

Exemples

- $f([-1, 2]) = [3, 4]$
- $f([-2, -1]) = [-1, 2] \cup \{3\}$
- $f([-2, 2]) = [-1, 2] \cup [3, 4]$



Théorème

L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.

IV/ Théorème des valeurs intermédiaires

Théorème

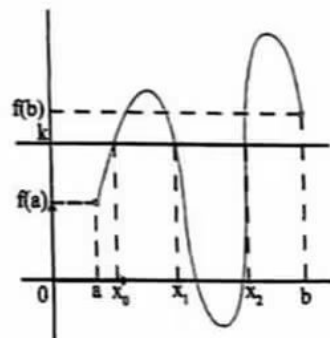
Soit a et b deux réels tels que $a < b$.

Soit f une fonction définie sur $[a, b]$.

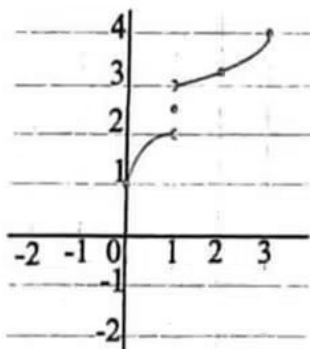
Si : • f est continue sur $[a, b]$.

• k est un réel compris entre $f(a)$ et $f(b)$.

Alors l'équation $f(x) = k$ possède au moins une solution dans l'intervalle $[a, b]$.



I/ Continuité en un réel



- La fonction f est continue à droite en 0.
- La fonction f est continue à gauche en 3.
- La fonction f n'est pas continue ni à gauche ni à droite en 1.
- La fonction f est continue en 2 car C_f ne possède pas un saut de tracé au point d'abscisse 2.

Théorème

Une fonction f est continue en un réel a si et seulement si f est continue à gauche et à droite en a .

II/ Continuité sur un intervalle

Définitions

- On dit que f est une fonction continue sur un intervalle ouvert I lorsque f est continue en tout réel de I .
- On dit que f est une fonction continue sur un intervalle $]a, b]$ lorsque f est continue sur $]a, b[$ et continue à gauche en b .
- On dit que f est une fonction continue sur un intervalle $[a, b[$ lorsque f est continue sur $]a, b[$ et continue à droite en a .
- On dit que f est une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$ lorsque f est continue sur $]a, b[$ et continue à droite en a et continue à gauche en b .

Théorèmes

- Toute fonction polynôme est continue sur $\mathbb{R}$ et en particulier sur tout intervalle inclus dans $\mathbb{R}$.
- Toute fonction rationnelle est continue sur tout intervalle inclus dans son ensemble de définition.

Théorèmes

- Si f est une fonction continue sur un intervalle I alors la fonction $|f|$ est continue sur I .
- Si f est une fonction continue sur un intervalle I et pour tout $x \in I$, $f(x) \geq 0$ alors la fonction $\sqrt{f}$ est continue sur I .