

Chapitre IV

Limites et comportement asymptotique

I) Limite infinie à l'infini :

■ Définitions :

- 1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ signifie que $\forall A > 0$, il existe $\beta > 0$ tel que
Si $x > \beta$ alors $f(x) > A$.
- 2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ signifie que $\forall A > 0$, il existe $\beta > 0$ tel que
Si $x > \beta$ alors $f(x) < -A$.
- 3) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ signifie que $\forall A > 0$, il existe $\beta > 0$ tel que
Si $x < -\beta$ alors $f(x) > A$.
- 4) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ signifie que $\forall A > 0$ il existe $\beta > 0$ tel que
Si $x < -\beta$ alors $f(x) < -A$.

■ Théorèmes :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x-a} = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{a-x} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x-a)^n = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow -\infty} (x-a)^n = \begin{cases} +\infty & \text{si } n \text{ est pair} \\ -\infty & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

II) Limites finies en $+\infty$ et $-\infty$:

■ Définitions :

- 1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$ signifie que $\forall A > 0$, il existe $\beta > 0$ tel que $x > \beta$
alors $|f(x) - L| < A$.
- 2) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$ signifie que $\forall A > 0$, il existe $\beta > 0$ tel que $x < -\beta$
alors $|f(x) - L| < A$.

■ Théorème : Si $\lim_{x \rightarrow \infty} f = \infty$ alors $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{f} = 0$

III) Limites infinies en un réel :

Définitions :

- 1) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ signifie que $\forall A > 0$, il existe $\beta > 0$ tel que
 $0 < |x - a| < \beta$ alors $f(x) > A$.
- 2) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$ signifie que $\forall A > 0$, il existe $\beta > 0$ tel que

Si $0 < |x - a| < \beta$ alors $f(x) < -A$.

3) $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$ signifie que $\forall A > 0, \exists \beta > 0$ tel que

Si $0 < x - a < \beta$ alors $f(x) > A$.

4) $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty$ signifie que $\forall A > 0, \exists \beta > 0$ tel que

Si $0 < a - x < \beta$ alors $f(x) > A$.

IV) Calculs de limites :

α un réel fini où $+\infty$ où $-\infty$; ℓ et ℓ' sont deux réels finies.

➤ limite d'une somme de fonction.

$\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x)$	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim_{x \rightarrow \alpha} g(x)$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) + g(x)$	$\ell + \ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	F.I

F.I : Forme indéterminée. Ce sont les cas où l'on ne peut pas conclure directement.

➤ Limite d'un produit de fonctions :

$\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x)$	ℓ	$\ell \neq 0$	∞	0
$\lim_{x \rightarrow \alpha} g(x)$	ℓ'	∞	∞	∞
$\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) \times g(x)$	$\ell \times \ell'$	∞	∞	F.I

Ce tableau a été simplifié pour rendre la mémorisation plus facile ; il faut naturellement appliquer la règle de signe au résultat.

Exemple : $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = -2$ alors $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) \times g(x) = -\infty$

➤ Limite d'un quotient de fonction :

$\lim_{x \rightarrow \alpha} f(x)$	ℓ	$\ell \neq 0$	$\ell \neq 0$	0	∞	∞	ℓ
$\lim_{x \rightarrow \alpha} g(x)$	$\ell' \neq 0$	0^+	0^-	0	∞	$\ell = 0^+$ ou 0^-	∞
$\lim_{x \rightarrow \alpha} \frac{f(x)}{g(x)}$	$\frac{\ell}{\ell'}$	$+\infty$ si $\ell > 0$ $-\infty$ si $\ell < 0$	$+\infty$ si $\ell < 0$ $-\infty$ si $\ell > 0$	F.I	F.I	∞ avec règle de signe	0

Formes indéterminées :

Formes indéterminées	Comment lever l'indétermination ? pistes
$+\infty -\infty$ ou $\frac{\infty}{\infty}$	Mettre en facteur l'expression « prépondérante »
$0 \times \infty$	Chercher une simplification ou se ramener à $\frac{\infty}{\infty}$
$\frac{0}{0}$	Chercher une simplification
Comportant des $\sqrt{\quad}$	Multiplier et diviser par l'expression conjuguée ou factoriser.

➤ $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ avec $a \neq 0$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ \text{ou} \\ x \rightarrow -\infty}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ \text{ou} \\ x \rightarrow -\infty}} a_n x^n$$

➤ $g(x) = \frac{a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + \dots + b_1 x + b_0}$ avec $a_n \neq 0$ et $b_m \neq 0$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ \text{ou} \\ x \rightarrow -\infty}} g(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ \text{ou} \\ x \rightarrow -\infty}} \frac{a_n x^n}{b_m x^m}$$

➤ $\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow \alpha} f(x) = \ell \\ f(x) > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \alpha} \sqrt{f(x)} = \sqrt{\ell}$

Théorèmes :

1) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} \sqrt{f(x)} = +\infty$

2) $\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \\ \text{et } f(x) \geq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} \sqrt{f(x)} = \sqrt{L}$

■ Les Asymptotes :

Soit f une fonction et C sa représentation graphique dans un repère du plan.

➤ $\lim_{x \rightarrow b^+} f(x) = +\infty$ ou $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = -\infty$ ou $\lim_{x \rightarrow b^+} f(x) = +\infty$ ou $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = -\infty$.

On dit alors que $\Delta : x = b$ est une asymptote verticale à C .

➤ $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = a$ ou $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = a$. On dit alors que

$\Delta' : y = a$ est une asymptote horizontale à C au voisinage de $+\infty$ ou $-\infty$.

➤ $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ (on remplace ∞ par soit $+\infty$ où $-\infty$).

On cherche à écrire f sous la forme : $f(x) = ax + b + g(x)$.

Si $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 0$, on déduit alors que :

$\Delta : y = ax + b$ est une asymptote au voisinage de ∞ .

■ Position ζ et Δ :

➤ Δ une droite, $\Delta : y = ax + b$:

* Si $f(x) - (ax + b) \geq 0$; alors ζ est au dessus de Δ .

* Si $f(x) - (ax + b) \leq 0$; alors ζ est au dessous de Δ .

➤ Montrer que deux courbes ζ et ζ' sont tangentes au point

d'abscisse x_0 :

On détermine les équations des tangentes aux deux courbes au point commun d'abscisse x_0 et on constate qu'il s'agit de la même droite.

Remarque : En utilise souvent les théorèmes et les opérations sur les limites et rarement les définitives des limites.