

Chapitre IV

Rotation

■ Définition :

Une **rotation** r de centre A et d'angle α est une application du plan vers le plan tel que :

* Pour tout $M \in P$ Si $M \neq A$, on associe M' tel que

$$(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AM'}) \equiv \alpha (2\pi) \quad \text{et} \quad AM = AM'.$$

* Si $M = A$ alors $r(A) = A$.

On note : $r(A, \alpha)(M) = M'$.

■ Définition :

Toute application du plan dans lui-même est une **isométrie** si elle conserve les distances.

- Toute rotation est une isométrie.

■ Propriétés des rotations :

Dans ce tableau les images des points A, B, C et D sont respectivement A', B', C' et D' par la rotation de centre O d'angle α .

Une rotation conserve	Signification
Distances	$AB = A'B'$
L'alignement	A, B et C alignés alors A', B' et C' sont alignés
Le parallélisme	$(AB) \parallel (CD)$ alors $(A'B') \parallel (C'D')$
L'orthogonalité	$(AB) \perp (CD)$ alors $(A'B') \perp (C'D')$
Les angles orientés	$(\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{C'D'}) \equiv (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) (2\pi)$
Le contact	Les images de deux courbes tangentes sont deux courbes tangentes
Les intersections de deux courbes	L'image de l'intersection de deux courbes est l'intersection de ces courbes
Le barycentre	C barycentre de $\{(A, \alpha)(B, \beta)\}$ barycentre de $\Rightarrow C'$ est le barycentre de $\{(A', \alpha)(B', \beta)\}$
Le produit scalaire	$\overline{AB} \cdot \overline{CD} = \overline{A'B'} \cdot \overline{C'D'}$
L'équipollence	$\overline{AB} = \overline{CD} \Rightarrow \overline{A'B'} = \overline{C'D'}$

■ Propriétés particuliers :

$$\left. \begin{array}{l} r_{(0,\alpha)}(A) = A' \\ r_{(0,\alpha)}(B) = B' \end{array} \right\} \text{ Alors } AB = A'B' \text{ et } (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}) \equiv \alpha (2\pi)$$

Théorème fondamental ($\alpha \neq 0 (2\pi)$)

Si A, B, A', B' sont quatre points tels que $AB = A'B'$ et $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}) \equiv \alpha (2\pi)$ alors il existe une unique rotation telle que $r(A) = A'$ et $r(B) = B'$

Si $\alpha \equiv 0 (2\pi)$ alors il existe une translation tel que $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'}$.

Une rotation transforme :

- Une droite en une droite.
- Un cercle $\mathbf{C}(A, a)$ en un cercle $\mathbf{C}'(r(A), a)$.
- Un segment en un segment isométrique.
- Une rotation $r_{(O, \alpha)}$ est une bijection et la réciproque est une rotation de centre O d'angle $-\alpha$, qu'on note $r^{-1}(O, \alpha) = r(O, -\alpha)$.

■ Composées :

- Composées de deux symétries axiales :

S_{Δ} et $S_{\Delta'}$ deux symétries axiales d'axes respectives Δ et Δ' .

Si $\Delta // \Delta'$ alors $S_{\Delta'} \circ S_{\Delta}$ est une translation de vecteur $2\overrightarrow{AA'}$ avec $A \in \Delta$ et $A' \in \Delta'$ et $\Delta \perp (AA')$.

$$S_{\Delta'} \circ S_{\Delta} = t_{2\overrightarrow{AA'}}$$

Si Δ est sécante à Δ' alors $S_{\Delta'} \circ S_{\Delta}$ est une rotation de centre A avec $\{A\} = \Delta \cap \Delta'$ d'angle $2\left(\vec{u}, \vec{u'}\right)$.

$\vec{u}$: vecteur directeur de Δ

$\vec{u'}$: vecteur directeur de Δ'

Cas particulier : Si $\Delta \perp \Delta'$ alors $S_{\Delta'} \circ S_{\Delta} = S_A$ est une symétrie centrale de centre A .

■ Composées de deux rotations :

- La composée d'une rotation d'angle α et d'une rotation d'angle β de même centre A est une rotation de centre A d'angle $\alpha + \beta$
- Si $\alpha + \beta \equiv 0 (2\pi)$ alors $r_{(A, \alpha)} \circ r_{(A, \beta)}$ est une identité du plan

- Recherche de centre de la composée de deux rotations de centre différent
 $f = \mathcal{R}(I, \alpha) \circ \mathcal{R}(J, \beta)$

Si $\alpha + \beta \equiv 0 (2\pi)$ alors f est une translation

Si $\alpha + \beta \not\equiv 0 (2\pi)$ alors f est une rotation

* Choisir deux points A et B dont on connaît ou dont on peut facilement construire les images A' et B' par f .

* D la médiatrice de $[AA']$ et D' la médiatrice de $[BB']$

Si D et D' sont sécantes en O , alors O est le centre de la rotation f

Si $D \parallel D'$ alors le centre de la rotation f est le point d'intersection de (AB) et de $(A'B')$.

* Si non sa dépend des énoncés de l'exercice