

Limite et comportement asymptotique

Rappel :

I) Limite à l'infini d'un polynôme et d'une fraction rationnelle

limite d'un polynôme (ou fonction polynôme) en $+\infty$ ou en $-\infty$

est celle de son terme de plus haut degré

exemple : $\lim_{x \rightarrow +\infty} (5x^4 - 3x^3 + x^2 - 2) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (5x^4) = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} (5x^4 - 3x^3 + x^2 - 2) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (5x^4) = +\infty$



limite d'une fraction rationnelle (ou fonction rationnelle)

en $+\infty$ ou en $-\infty$ est celle du quotient des termes

de plus haut degré du numérateur et du dénominateur

exemple : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^3 - 2x^2 + x + 2}{5x^5 + x^4 + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^3}{5x^5} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4}{5x^2} = 0$

II) asymptote et branche infini

Dans toute la suite a et b sont deux réels et (φ_f) la courbe d'une fonction f

a) si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty$

alors la courbe (φ_f) admet une **asymptote verticale d'équation : $x = a$**

b) si $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = b$

alors la courbe (φ_f) admet une **asymptote horizontale d'équation : $y = b$**

c) si $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty$,

(attention) il y a 4 possibilités, continuer à chercher $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x}$:

cas n°1 : si $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = a \neq 0$ et $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x - ax) = b$

alors la courbe (φ_f) admet **une asymptote oblique**

d'équation : $y = ax + b$

cas n°2 : si $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$

alors la courbe (φ_f) admet une branche parabolique de direction (ox)

cas n°3 : si $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \pm\infty$

alors la courbe (φ_f) admet une branche parabolique de direction (oy)

cas n°4 : si $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = a \neq 0$ et $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x - ax) = \pm\infty$

alors la courbe admet une branche parabolique de direction

la droite d'équation : $y = ax$.



exercice n°1 :

Déterminer la limite de chacune de chacune

des fonctions suivantes puis déduire si la courbe admet des asymptotes :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x-6}), \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{2x^2+x-1}{5x^2-2x+7}}, \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-6}{\sqrt{2x-3} - \sqrt{2x+7}}$$

exercice n°2 :

Soit la fonction définie sur $R \setminus \{-1\}$ par :

$$f(x) = 4 - x - \frac{2}{(x+1)^2}$$

1) Etudier les limites de f aux bornes de son domaine de définition.

2) Montrer que (φ_f) admet la droite d'équation $y = 4 - x$,

comme asymptote oblique.

exercice n°3 : Soit la fonction définie sur $R \setminus \{2\}$ par : $f(x) = \frac{x^2-3x+6}{2-x}$

1) déterminer les réels a et b et c tels que

$$\text{pour tout } x \in D_f \text{ on a : } f(x) = ax + b + \frac{c}{2-x}$$

2) Déterminer les limites de f aux bornes de son domaine de définition,

puis déduire les asymptotes de (φ_f)

3) Montrer que (φ_f) admet une asymptote oblique d'équation à préciser.

exercice n°4 :

Soit la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2 + 4x + 5} + 2 & \text{si } x \in]-\infty; -2] \\ \frac{x^2 + x + 1}{x + 2} & \text{si } x \in]-2; +\infty] \end{cases}$$



On désigne par (φ_f) sa courbe dans un repère orthonormé $(o; \vec{i}; \vec{j})$

1) déterminer le domaine de définition de f

2) calculer $\lim_{x \rightarrow (-2)^+} f(x)$. Interpréter graphiquement le résultat.

3) Montrer que la droite d'équation $(D_1) y = -x$

est une asymptote oblique à (φ_f) au voisinage de $-\infty$.

4) a) Vérifier que pour tout $x \in]-2; +\infty]$; $f(x) = x - 1 + \frac{3}{x + 2}$

b) Montrer que la droite d'équation $(D_2) y = x - 1$

est une asymptote oblique à (φ_f) au voisinage de $+\infty$.

c) Déterminer la position de (φ_f) par rapport (D_2) .

exercice n°5 :

Soit la fonction définie par $f(x) = \begin{cases} x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{3}{2} & \text{si } x \leq 1 \\ \sqrt{x^2 - x + 1} & \text{si } x > 1 \end{cases}$



1) Déterminer le domaine de définition de f

2) a) calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$,

b) Montrer que pour tout $x > 1$ on a $f(x) - x = \frac{\frac{1}{x}-1}{1+\sqrt{1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}}$.

En déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x]$

3) a) montre que f est continue en 1.

b) montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.

4) a) montre que f est dérivable en 1.

b) Ecrire une équation de la tangente (T) à (φ_f) au point A(1, 1)

5) a) Montrer que pour tout $x > 1$ on a $[f(x)]^2 - \frac{1}{4}(x+1)^2 = \frac{3}{4}(x-1)^2$

b) En étudiant pour tout x de $\mathbb{R}$ le signe de $f(x) - \frac{1}{2}(x+1)$,

déterminer la position de (φ_f) par rapport à (T).

Correction exercice N°1 :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x-6}) ,$$

$$\begin{aligned}\sqrt{x+1} - \sqrt{x-6} &= \frac{(\sqrt{x+1} - \sqrt{x-6})(\sqrt{x+1} + \sqrt{x-6})}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-6}} \\ &= \frac{\sqrt{x+1}^2 - \sqrt{x-6}^2}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-6}} \\ &= \frac{x+1 - (x-6)}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-6}} \\ &= \frac{7}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-6}}\end{aligned}$$



$$\text{Donc : } \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x-6}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{7}{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-6}} = 0$$

$$\text{car : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x+1} + \sqrt{x-6} = +\infty$$

Si on pose : $f(x) = \sqrt{x+1} + \sqrt{x-6}$ puisque :

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ alors la droite d'équation: $y = 0$ est une

asymptote de (C_f) au voisinage de $+\infty$.

$$\text{Puisque : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 + x - 1}{5x^2 - 2x + 7} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2}{5x^2} = \frac{2}{5}$$

$$\text{Alors : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{2x^2 + x - 1}{5x^2 - 2x + 7}} = \sqrt{\frac{2}{5}}$$

$$\text{Si on pose : } g(x) = \sqrt{\frac{2x^2 + x - 1}{5x^2 - 2x + 7}} \text{ puisque } \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \sqrt{\frac{2}{5}}$$

alors la droite d'équation: $y = \sqrt{\frac{2}{5}}$ est une

asymptote de (C_g) au voisinage de $+\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-6}{\sqrt{2x-3} - \sqrt{2x+7}}$$

$$\begin{aligned} \text{On a : } \frac{-6}{\sqrt{2x-3} - \sqrt{2x+7}} &= \frac{-6(\sqrt{2x-3} + \sqrt{2x+7})}{(\sqrt{2x-3} - \sqrt{2x+7})(\sqrt{2x-3} + \sqrt{2x+7})} \\ &= \frac{-6(\sqrt{2x-3} + \sqrt{2x+7})}{(2x-3) - (2x+7)} \\ &= \frac{-6(\sqrt{2x-3} + \sqrt{2x+7})}{-10} \\ &= \frac{3(\sqrt{2x-3} + \sqrt{2x+7})}{5} \end{aligned}$$



$$\text{Donc : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-6}{\sqrt{2x-3} - \sqrt{2x+7}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3(\sqrt{2x-3} + \sqrt{2x+7})}{5} = +\infty$$

exercice n°2 :

Soit la fonction définie sur $R \setminus \{-1\}$ par : $f(x) = 4 - x - \frac{2}{(x+1)^2}$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} 4 - x - \frac{2}{(x+1)^2} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-1)^-} 4 - x - \frac{2}{(x+1)^2} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} 4 - x - \frac{2}{(x+1)^2} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 4 - x - \frac{2}{(x+1)^2} = -\infty$$

$$2) \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) - (4 - x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{-2}{(x+1)^2} \right) = 0, \text{ donc la droite}$$

d'équation: $y = 4 - x$ est asymptote oblique de (φ_f) au voisinage de $\pm\infty$

exercice n°3 : Soit la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ par : $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 6}{2 - x}$

1) déterminer les réels a et b et c tels que

$$\text{pour tout } x \in D_f \text{ on a : } f(x) = ax + b - \frac{c}{2 - x}$$

2) Déterminer les limites de f aux bornes de son domaine de définition ,
puis déduire les asymptotes de (φ_f)

$$f(x) = \frac{x^2 - 3x + 6}{2 - x} = \frac{x^2 - 4x + 4 + x + 2}{2 - x} = \frac{(2 - x)^2 - (-x + 2) + 4}{2 - x}$$

$$f(x) = 2 - x - 1 + \frac{4}{2 - x} = -x + 1 + \frac{4}{2 - x}$$

$$\text{Donc : } f(x) = -x + 1 + \frac{4}{2 - x}$$



Autre méthode : On a :

$$\text{d'une part : } f(x) = \frac{x^2 - 3x + 6}{2 - x}, \text{ d'autre part : } f(x) = ax + b + \frac{c}{2 - x}$$

$$\text{donc d'une part : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 3x + 6}{2x - x^2} = -1$$

$$\text{d'autre part : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} a + \frac{b}{x} + \frac{c}{2x - x^2} = a$$

$$\text{Donc : } a = -1, \text{ donc } f(x) = -x + b + \frac{c}{2 - x}$$

$$\text{On a d'une part : } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) + x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 3x + 6}{2 - x} + x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x + 6}{2 - x} = 1$$

$$\text{d'autre part } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) + x = \lim_{x \rightarrow +\infty} b + \frac{c}{2 - x} = b$$

$$\text{Donc : } b = 1$$

Donc : $f(x) = -x + 1 + \frac{c}{2-x}$

Reste le réel : c

On a d'une part : $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)(2-x) = \lim_{x \rightarrow 2} x^2 - 3x + 6 = 4$

d'autre part : $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)(2-x) = \lim_{x \rightarrow 2} (-x + 1)(2-x) + c = c$

Donc : $c = 4$

Conclusion :

$$f(x) = -x + 1 + \frac{4}{2-x}$$



**2) Déterminer les limites de f aux bornes de son domaine de définition ,
puis déduire les asymptotes de (φ_f)**

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \left(-x + 1 + \frac{4}{2-x} \right) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \left(-x + 1 + \frac{4}{2-x} \right) = -\infty$$

Donc : la droite d'équation : $x = 2$ est asymptote verticale de (C_f)

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - (-x + 1)) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{4}{2-x} = 0$$

Donc la droite d'équation : $y = -x + 1$ est une asymptote de (C_f) au $V(\pm\infty)$

exercice n°4 :

Soit la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2 + 4x + 5} + 2 & \text{si } x \in]-\infty; -2] \\ \frac{x^2 + x + 1}{x + 2} & \text{si } x \in]-2; +\infty[\end{cases}$$



On désigne par (φ_f) sa courbe dans un repère orthonormé $(o; \vec{i}; \vec{j})$

1) déterminer le domaine de définition de f

$$\text{On a : } x^2 + 4x + 5 = x^2 + 4x + 4 + 1 = (x + 2)^2 + 1$$

$$\text{Donc pour tout : } x \in \mathbb{R}; x^2 + 4x + 5 \geq 0$$

Donc la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ donc : $D_f = \mathbb{R}$

2) calculer $\lim_{x \rightarrow (-2)^+} f(x)$. Interpréter graphiquement le résultat

$$\lim_{x \rightarrow (-2)^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-2)^+} \frac{x^2 + x + 1}{x + 2} = +\infty$$

Donc : la droite d'équation : $x = -2$ est asymptote verticale de (C_f) .

3) Montrer que la droite d'équation $(D_1) y = -x$

est une asymptote oblique à (φ_f) au voisinage de $-\infty$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) + x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 + 4x + 5} + (x + 2) \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(\sqrt{x^2 + 4x + 5} + (x + 2))(\sqrt{x^2 + 4x + 5} - (x + 2))}{\sqrt{x^2 + 4x + 5} - (x + 4)} \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 4x + 5 - (x + 2)^2}{\sqrt{x^2 + 4x + 5} - (x + 4)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2 + 4x + 5} + (x + 4)} = 0$$

Donc : la droite d'équation $(D_1) y = -x$

est une asymptote oblique à (φ_f) au voisinage de $-\infty$.

4) a) **Vérifier que pour tout $x \in]-2; +\infty]$; $f(x) = x - 1 + \frac{3}{x+2}$**

b) Montrer que la droite d'équation $(D_2): y = x - 1$

est une asymptote oblique à (φ_f) au voisinage de $+\infty$.

c) Déterminer la position de (φ_f) par rapport (D_2) .

a)

$$\text{pour tout } x \in]-2; +\infty]; f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x + 2}$$

$$\text{pour tout } x \in]-2; +\infty]; \Leftrightarrow f(x) = \frac{(x+2)(x-1) + 3}{x+2}$$

$$\text{pour tout } x \in]-2; +\infty]; \Leftrightarrow f(x) = x - 1 + \frac{3}{x+2}$$

b)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (x - 1)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{x+2} = 0$$



Donc : la droite d'équation $(D_2): y = x - 1$

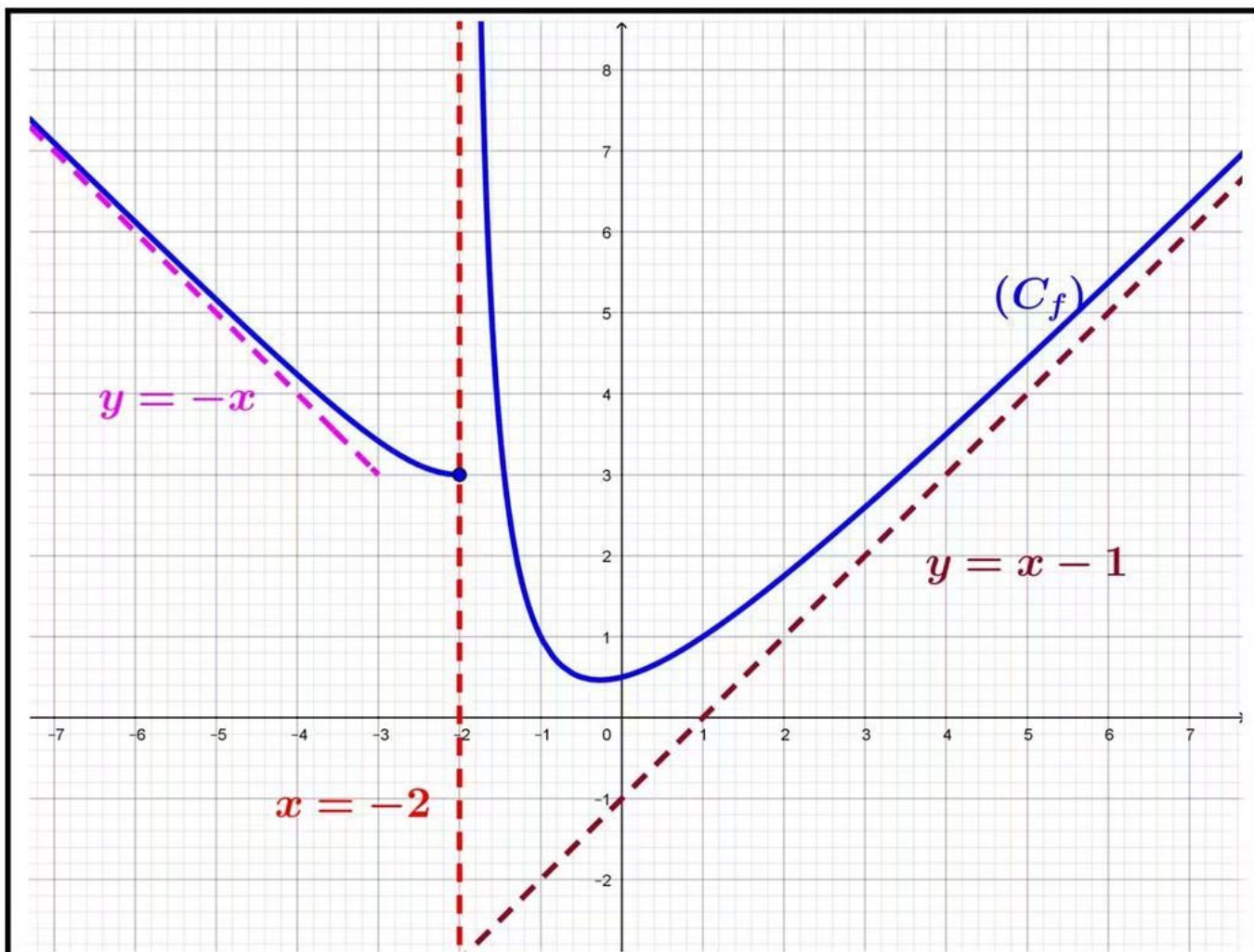
est une asymptote oblique à (φ_f) au voisinage de $+\infty$

c) pour déterminer la position de (φ_f) par rapport (D_2) ;

il suffit d'étudier le signe de : $f(x) - (x - 1)$ pour $x \in]-2; +\infty]$;

On a : pour tout $x \in]-2; +\infty]$; $f(x) - (x - 1) = \frac{3}{x+2} > 0$

Donc : la courbe (φ_f) est au dessus de (D_2) .



exercice n°5 :

Soit la fonction définie par $f(x) = \begin{cases} x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{3}{2} & \text{si } x \leq 1 \\ \sqrt{x^2 - x + 1} & \text{si } x > 1 \end{cases}$

1) Déterminer le domaine de définition de f :

⊛ La fonction $x \rightarrow x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{3}{2}$ est définie sur $\mathbb{R}$

donc f est définie pour tout : $x \leq 1$

⊛ La fonction $x \rightarrow \sqrt{x^2 - x + 1}$ est définie si $x^2 - x + 1 \geq 0$

Or : $x^2 - x + 1 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$

donc f est définie pour tout : $x > 1$

Conclusion : f est définie pour tout : $x \in \mathbb{R}$ donc : $D_f = \mathbb{R}$



2) a) calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{3}{2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 - x + 1} = +\infty$$

b) Montrer que pour tout $x > 1$ on a $f(x) - x = \frac{\frac{1}{x} - 1}{1 + \sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}}$

pour tout $x > 1$ on a :

$$f(x) - x = \sqrt{x^2 - x + 1} - x = \frac{(\sqrt{x^2 - x + 1} - x)(\sqrt{x^2 - x + 1} + x)}{\sqrt{x^2 - x + 1} + x}$$

$$= \frac{(x^2 - x + 1) - x^2}{\sqrt{x^2 - x + 1} + x} = \frac{-x + 1}{\sqrt{x^2 - x + 1} + x} = \frac{x \left(\frac{1}{x} - 1 \right)}{\sqrt{x^2 \left(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \right)} + x}$$

$$= \frac{x \left(\frac{1}{x} - 1 \right)}{|x| \sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} + x} = \frac{x \left(\frac{1}{x} - 1 \right)}{x \left(\sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} + 1 \right)} = \frac{\frac{1}{x} - 1}{\sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} + 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x} - 1}{\sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} + 1} = \frac{-1}{2}$$

Donc : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[f(x) - \left(x - \frac{1}{2} \right) \right] = 0$

Donc : la droite d'équation $(D_2): y = x - \frac{1}{2}$

est une asymptote oblique $a(\varphi_f)$ au voisinage de $+\infty$



3) a) montre que f est continue en 1.

On a : $f(1) = 1^2 - \frac{3}{2} \times 1 + \frac{3}{2} = 1$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \sqrt{x^2 - x + 1} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{3}{2} = 1$$



Donc : $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 1 = f(1)$ donc f est continue en 1.

b) montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.

⊙ La fonction $x \rightarrow x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{3}{2}$ est continue sur $\mathbb{R}$, donc elle

continue sur $] -\infty, 1[$; donc f continue sur $] -\infty, 1[$

⊙ La fonction $x \rightarrow \sqrt{x^2 - x + 1}$ est continue sur $\mathbb{R}$, donc elle

continue sur $] 1, +\infty[$; donc f continue sur $] 1, +\infty[$

⊙ f est continue en 1

Conclusion : f est continue sur $\mathbb{R}$.

4) a) montre que f est dérivable en 1 :

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{x^2 - x + 1} - 1}{x - 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(\sqrt{x^2 - x + 1} - 1)(\sqrt{x^2 - x + 1} + 1)}{(x - 1)(\sqrt{x^2 - x + 1} + 1)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - x}{(x - 1)(\sqrt{x^2 - x + 1} + 1)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x(x - 1)}{(x - 1)(\sqrt{x^2 - x + 1} + 1)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x}{(\sqrt{x^2 - x + 1} + 1)}$$

$$= \frac{1}{2} \text{ donc } f \text{ est dérivable à droite en 1 et } f'_d(1) = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{3}{2} - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}}{x - 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(x - 1)\left(x - \frac{1}{2}\right)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \left(x - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$$



donc f est dérivable à gauche en 1 et $f'_g(1) = \frac{1}{2}$

puisque : $f'_d(1) = f'_g(1) = \frac{1}{2}$ alors f est dérivable en 1 et $f'(1) = \frac{1}{2}$

b) Ecrire une équation de la tangente (T) à (φ_f) au point A(1, 1)

$$(T): y = f'(1)(x - 1) + f(1) \Leftrightarrow (T): y = \frac{1}{2}(x - 1) + 1$$

$$\Leftrightarrow (T): y = \frac{1}{2}(x + 1)$$

5) a) Montrer que pour tout $x > 1$ on a $[f(x)]^2 - \frac{1}{4}(x + 1)^2 = \frac{3}{4}(x - 1)^2$

b) En étudiant pour tout x de $\mathbb{R}$ le signe de $f(x) - \frac{1}{2}(x + 1)$,

déterminer la position de (φ_f) par rapport à (T).

pour tout $x > 1$ on a :

$$\begin{aligned} [f(x)]^2 - \frac{1}{4}(x + 1)^2 &= \left(\sqrt{x^2 - x + 1}\right)^2 - \frac{1}{4}(x + 1)^2 \\ &= x^2 - x + 1 - \frac{1}{4}(x^2 + 2x + 1) \\ &= \frac{3}{4}x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{3}{4} \\ &= \frac{3}{4}(x^2 - 2x + 1) = \frac{3}{4}(x - 1)^2 \end{aligned}$$

Donc pour tout $x > 1$; $[f(x)]^2 - \frac{1}{4}(x + 1)^2 \geq 0$

$$\Leftrightarrow f(x) \geq \frac{1}{2}(x + 1)$$

$\Leftrightarrow f(x) - \frac{1}{2}(x + 1) \geq 0$ donc (φ_f) est au dessus de (T)

