



Dans tous les exercices le plan est orienté.

Exercice 1

On considère un parallélogramme $ABCD$ de sens direct.

- 1) Construire le triangle IAD rectangle et isocèle en I tel que $(\widehat{IA}, \widehat{ID}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$ et le triangle DCE rectangle isocèle en D tel que $(\widehat{DC}, \widehat{DE}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$.
- 2) Soit R la rotation de centre I et d'angle $\frac{\pi}{2}$
 - a) Quelle est l'image de A par R ?
 - b) Montrer que $R(B) = E$.
- 3) Soit A' le symétrique de A par rapport à I .
 - a) Justifier que $A' = R(D)$.
 - b) Montrer que $A'E = BD$ et que les droites $(A'E)$ et (BD) sont perpendiculaires.

Exercice 2

On considère un triangle ABC tel que $(\widehat{AB}, \widehat{AC}) \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi]$ et $AB < AC$. On désigne par ζ le cercle circonscrit à ce triangle et par O son centre.

- 1) Faire une figure.
- 2) Soit l'ensemble $E = \{M \in P / (\widehat{MB}, \widehat{MC}) \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi]\}$.
 - a) Vérifier que $A \in E$ puis déterminer et construire l'ensemble E .
 - b) Déterminer et construire le point I du plan tel que $IB = IC$ et $(\widehat{IB}, \widehat{IC}) \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi]$.
- 3) Soit P le point du segment $[AC]$ tel que $CP = AB$.
 - a) Montrer qu'il existe une unique rotation R telle que $R(A) = P$ et $R(B) = C$. Quel est son angle ?
 - b) Déterminer le centre de la rotation R .
- 4) Donner la nature du triangle IAP et en déduire que $AC = AI + AB$.
- 5) Soit M un point variable de l'ensemble E et G le centre de gravité du triangle MBC . Déterminer et construire l'ensemble décrit par le point G lorsque M décrit E .

Exercice 3

On considère un carré $ABCD$ tel que $(\widehat{AB}, \widehat{AD}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$. Soit $r = R_{\left(A, \frac{\pi}{2}\right)}$

- 1) Préciser les images par r des droites (AB) et (BC) .
- 2) Soit le point P tel que $\overrightarrow{BP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$. La droite (AP) coupe (CD) en Q . La perpendiculaire à (AP) menée par A coupe (BC) en K et (CD) en S .

- a) Préciser les images par r des droites (AP) et (AK)
- b) Montrer que $r(K) = Q$ et $r(P) = S$
- c) Soient les points I et J milieux respectifs des segments $[KP]$ et $[QS]$.

Montrer que le triangle AIJ est rectangle isocèle.

- 3) Montrer que les droites (PS) et (QK) sont perpendiculaires.

Exercice 4

On considère un triangle ABC de sens direct. BAB' et ACC' deux triangles rectangles et isocèles en A et de sens direct.

- 1) En utilisant la rotation r_1 de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$ montrer que : $BC' = B'C$ et que $(BC') \perp (B'C)$.
- 2) a) Montrer qu'il existe une unique rotation r_2 qui transforme B en C et C' en B' .
b) Déterminer son angle θ et construire son centre J .
- 3) Soit $E = B * C'$ et $F = C * B'$.
a) Déterminer $r_1(F)$ et $r_2(E)$.
b) En déduire que $AFJE$ est un carré.

Exercice 5

On considère un triangle ABC rectangle et isocèle en A tel que : $(\widehat{AB}, \widehat{AC}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$ on désigne par I le milieu de $[BC]$ et par Δ la droite perpendiculaire à (BC) et passant par C et on désigne par K le point d'intersection de Δ et (AB) et on désigne par J le milieu $[KC]$.

- 1) Faire un figure
- 2) Soit R la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$
a) Déterminer : $R(B)$, $R((AC))$ et $R((BC))$.
b) Déduire $R(C)$ et $R(I)$.
- 3) On désigne par ζ le cercle circonscrit au triangle ABC .
Déterminer l'image ζ' du cercle ζ par la rotation R puis déterminer $\zeta \cap \zeta'$.
- 4) Soit M un point du plan tel que : $(\widehat{MA}, \widehat{MB}) \equiv \frac{5\pi}{4} [2\pi]$.
a) Déterminer l'ensemble des points M .
b) On pose : $M' = R(M)$, déterminer l'ensemble des points M' lorsque M varie.
c) Montrer que $(BM) \perp (CM')$ et que $IM = JM'$.

Exercice 6

On considère un parallélogramme $ABCD$ de centre O tel que $AB \neq AD$, $(\widehat{AB}, \widehat{AD}) \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi]$ et $(\widehat{DA}, \widehat{DB}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$. Soit E le point du plan tel que CED est un triangle équilatéral direct.

- 1) a) Montrer qu'il existe une unique rotation R telle que $R(A) = E$ et $R(B) = D$.
b) Déterminer son angle θ et construire son centre I .
- 2) La droite (EC) coupe (AB) en F .

- a) Montrer que $D \in [AE]$.
 - b) Montrer que le triangle AFE est équilatéral direct.
 - c) Montrer que $R(F) = A$.
 - d) En déduire que I est le centre du cercle ζ circonscrit au triangle AEF .
- 3) Soit R' la rotation de centre C et d'angle $-\frac{\pi}{3}$
- a) Déterminer $R'(D)$ et $R'(F)$.
 - b) En déduire que les droites (FD) et (BE) sont sécantes en un point J .
 - c) Montrer que $(\widehat{JD, JB}) \equiv \frac{2\pi}{3} [2\pi]$.

- 4) On désigne par ζ' le cercle circonscrit au triangle ABD .
Montrer que le cercle ζ' passe par I et J .

Exercice 7

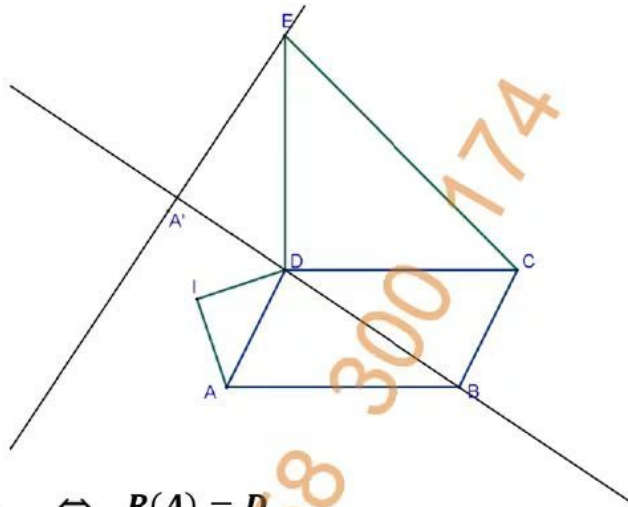
On considère un carré $ABCD$ de centre O tel que $(\widehat{AB, AD}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$.

Soit R la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$

- 1) a) Faire une figure
 - b) Montrer que $R(D) = A$ et $R(C) = B$
 - c) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de $R \circ R$.
 - d) En déduire que $R(A) = B$.
- 2) Soit M un point du segment $[AD]$ distinct de A et D . La perpendiculaire à la droite (MC) passant par D coupe le segment $[AB]$ en un point N .
 - a) Déterminer les images du segment $[AD]$ et de la droite (MC) par la rotation R .
 - b) En déduire que $R(M) = N$.
 - c) En déduire que $CM = DN$ et que $(CM) \perp (DN)$.
- 3) Soit ζ le cercle de centre O et passant par A ; la demi-droite $[CM)$ recoupe le cercle ζ en E . Soit F le point de la demi-droite $[DN)$ tel que $DF = CE$.
 - a) Montrer que $R(E) = F$.
 - b) Déterminer l'image de ζ par R .
 - c) En déduire l'ensemble des points F lorsque M varie sur le segment $[AD]$.

Exercice 1

1)



2) a) On a $\begin{cases} IA = ID \\ (\widehat{IA, ID}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi] \end{cases} \Leftrightarrow R(A) = D$

b) On $AB = DC = DE$ donc $AB = DE$

$$\begin{aligned} (\widehat{AB, DE}) &\equiv (\widehat{DC, DE}) [2\pi] && \text{car } \overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{DC} \text{ sont colinéaires et de même sens} \\ &\equiv \frac{\pi}{2} [2\pi] \end{aligned}$$

$$\begin{cases} AB = DE \\ R(A) = D \\ (\widehat{AB, DE}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi] \end{cases} \Leftrightarrow R(B) = E$$

3) a) On A' le symétrique de A par rapport à I donc $IA = IA'$ et on a $IA = ID$ donc $ID = IA'$

$$\begin{aligned} (\widehat{ID, IA'}) &\equiv (\widehat{ID, AI}) [2\pi] && \text{car } \overrightarrow{IA'} \text{ et } \overrightarrow{AI} \text{ sont colinéaires et de même sens} \\ &\equiv (\widehat{ID, IA}) + \pi [2\pi] \\ &\equiv -(\widehat{IA, ID}) + \pi [2\pi] \\ &\equiv -\frac{\pi}{2} + \pi [2\pi] \\ &\equiv \frac{\pi}{2} [2\pi] \end{aligned}$$

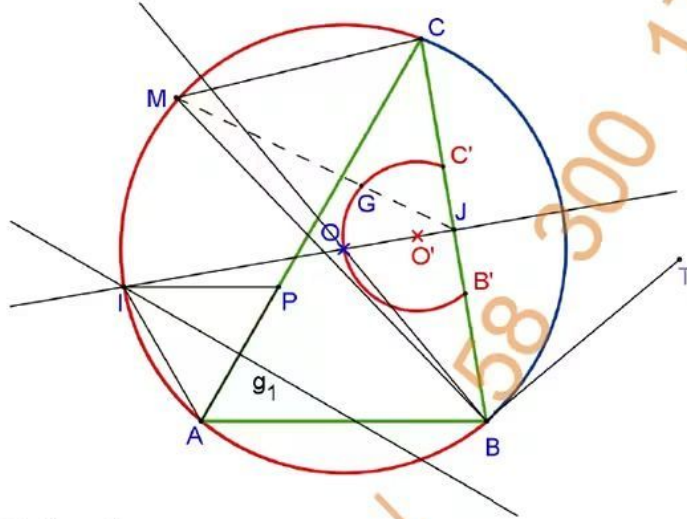
$$\begin{cases} ID = IA' \\ R(I) = I \\ (\widehat{ID, IA'}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi] \end{cases} \Leftrightarrow R(D) = A'$$

$$\text{b) On a } \begin{cases} B \neq D \\ R(B) = E \\ R(D) = A' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} BD = EA' \\ (\widehat{BD, EA'}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi] \end{cases}$$

donc $A'E = BD$ ($A'E \perp BD$)

Exercice 2

1)



2) a) On a $(\widehat{AB, AC}) \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi]$ donc $A \in E$.

E est l'arc $\widehat{CB}$ du cercle tangent à $[BT]$ en B et tel que $(\widehat{BT, BC}) \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi]$ contenu dans le demi plan de frontière (BC) ne contenant pas $[BT]$.

b) On a $IB = IC$ et $(\widehat{IB, IC}) \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi]$, donc $I \in \text{med}[BC] \cap E$

3) a) On a $A \neq B$ et $AB = PC$ donc il existe une unique rotation R telle que $R(A) = P$ et $R(B) = C$ d'angle $\theta \equiv (\widehat{AB, PC}) [2\pi] \equiv (\widehat{AB, AC}) [2\pi] \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi]$.

b) Soit K le centre de R , on a $R(B) = C$ donc $KB = KC$ et $(\widehat{KB, KC}) \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi]$

or on a $IB = IC$ et $(\widehat{IB, IC}) \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi]$ donc $K = I$ donc I est le centre de R .

4) On a $\begin{cases} R(I) = I \\ R(A) = P \end{cases} \begin{cases} IA = IB \\ (\widehat{IA, IB}) \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi] \end{cases}$ donc le triangle IAP est équilatéral.

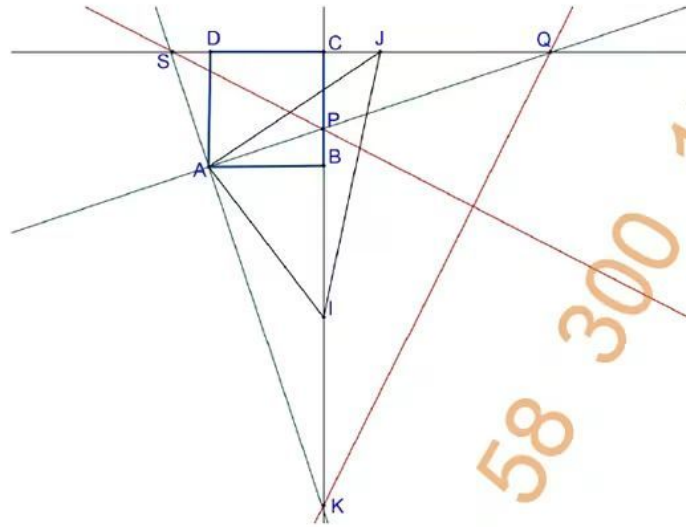
On a $P \in [AC]$ donc $AC = AP + PC$ or IAP est équilatéral donc $AI = AP$ et on a $CP = AB$ donc $AC = AI + AB$

5) Soit $J = B * C$, on a G est le centre de gravité du triangle MBC donc $\overrightarrow{JG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{JM}$ Soit h l'homothétie de centre J et de rapport $\frac{1}{3}$ on a donc $h(M) = G$, or $M \in E$ donc $h(M) \in$

$h(E)$, or E est l'arc BC du cercle ζ donc $h(E)$ est l'arc $C'B'$ du cercle ζ' de centre $O' = h(O)$ et de rayon $r' = \frac{1}{3}OA$ et tel que $C' = h(C)$ et $B' = h(B)$.

Exercice 3

1)



2) On a r de centre A donc $r(A) = A$ et r d'angle $\frac{\pi}{2}$ donc $r((AB))$ est la droite perpendiculaire à (AB) en $r(A) = A$, or $(AD) \perp (AB)$ en A donc $r((AB)) = (AD)$

$$\text{On a } \begin{cases} r(A) = A \\ AB = AD \\ (\widehat{AB, AD}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi] \end{cases} \quad \text{donc } r(B) = D$$

On a $(BC) \perp (AB)$ en B donc $r((BC)) \perp r((AB))$ en $r(B) = D$ donc $r((BC)) \perp (AD)$ en D or $(CD) \perp (AD)$ en D donc $r((BC)) = (CD)$.

3) a) $r((AP))$ est la droite perpendiculaire à (AP) en $r(A) = A$, or $(AK) \perp (AP)$ en A donc $r((AP)) = (AK)$

$r((AK))$ est la droite perpendiculaire à (AK) en $r(A) = A$, or $(AP) \perp (AK)$ en A donc $r((AK)) = (AP)$

b) On a $K \in (BC) \cap (AK)$, donc $r(K) \in r((BC)) \cap r((AK))$

donc $r(K) \in (DC) \cap (AQ)$ or $(DC) \cap (AQ) = \{Q\}$, donc $r(K) = Q$.

On a $P \in (BC) \cap (AQ)$, donc $r(P) \in r((BC)) \cap r((AQ))$ donc $r(P) \in r(DC) \cap (AK)$

Or $(DC) \cap (AK) = \{S\}$ donc $r(P) = S$.

c) On $I = K * P$ donc $r(I) = r(K) * r(P)$ donc $r(I) = Q * S$, or $J = S * Q$

donc $r(I) = J$

$$r(I) = J \Leftrightarrow \begin{cases} AI = AJ \\ (\widehat{AI, AJ}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi] \end{cases} \quad \text{donc le triangle } AIJ \text{ est rectangle isocèle en } A.$$

4) On a : $r(K) = Q$ et $r(P) = S$ donc $(\widehat{KP}, \widehat{QS}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$ donc $(KP) \perp (QS)$

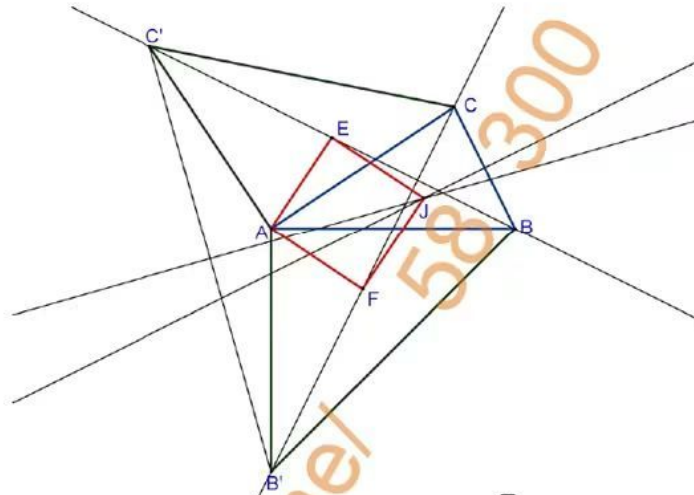
Dans le triangle SKQ on a $(KP) \perp (QS)$ donc (KP) est la hauteur issue de K .

et on a $(AK) \perp (AP)$ donc (AP) est la hauteur issue de Q .

On a (SP) , (AP) et (KP) concourantes en P donc (SP) est la hauteur issue de S ,
donc (PS) et (QK) sont perpendiculaires.

Exercice 4

1)



2) on a r_1 de centre A donc $r_1(A) = A$ et r_1 d'angle $\frac{\pi}{2}$ donc

$$\begin{cases} r_1(A) = A \\ AB' = AB \\ (\widehat{AB'}, \widehat{AB}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi] \end{cases} \quad \text{donc } r_1(B') = B$$

D'autre part

$$\begin{cases} r_1(A) = A \\ AC = AC' \\ (\widehat{AC}, \widehat{AC'}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi] \end{cases} \quad \text{donc } r_1(C) = C'$$

$$\text{Donc } \begin{cases} r_1(B') = B \\ r_1(C) = C' \end{cases} \quad \text{donc } BC' = B'C \quad \text{et} \quad (\widehat{B'C}, \widehat{BC'}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$$

Conclusion on a : $BC' = B'C$ et $(BC') \perp (B'C)$.

3) a) On a $B \neq C'$ et $BC' = B'C$ donc il existe une unique rotation r_2 qui transforme B en C et C' en B' .

$$\text{b) } r_2(B) = C \text{ et } r_2(C') = B' \quad \text{donc } J \in \text{med}[BC] \cap \text{med}[C'B']$$

$$\begin{aligned} \text{et } \theta &\equiv (\widehat{BC'}, \widehat{CB'}) [2\pi] \equiv -(\widehat{CB'}, \widehat{BC'}) [2\pi] \equiv -(\widehat{B'C}, \widehat{BC'}) + \pi [2\pi] \\ &\equiv -\frac{\pi}{2} + \pi [2\pi] \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi] \end{aligned}$$

$$4) \text{ a) On a } F = C * B' \quad \text{donc } r_1(F) = r_1(C) * r_1(B') \quad \text{donc } r_1(F) = C' * B$$

or $E = B * C'$ donc $r_1(F) = E$

On a $E = B * C'$ donc $r_2(E) = r_2(B) * r_2(C)$ donc $r_2(E) = C * B'$

or $F = C * B'$ donc $r_2(E) = F$

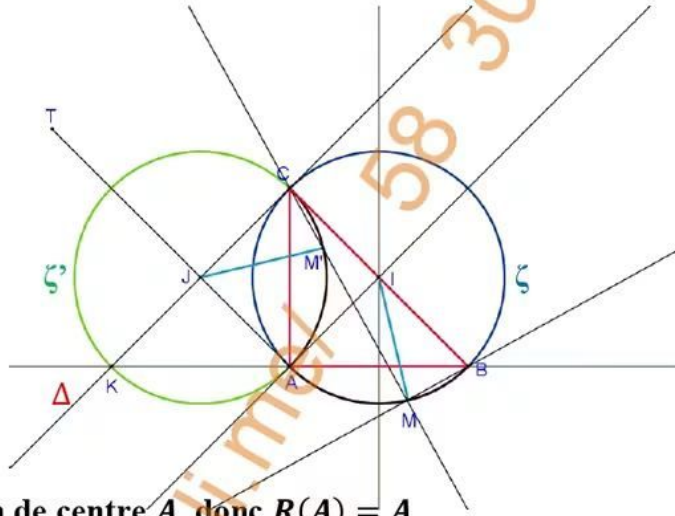
$$\text{b) On a } r_1(F) = E \Leftrightarrow \begin{cases} AF = AE \\ (\widehat{AF, AE}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi] \end{cases}$$

$$\text{On a } r_2(E) = F \Leftrightarrow \begin{cases} JE = JF \\ (\widehat{JE, JF}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi] \end{cases}$$

Donc $AFJE$ est un carré.

Exercice 5

1)



2) a) On a R la rotation de centre A donc $R(A) = A$

Le triangle ABC rectangle et isocèle en A et on a $(\widehat{AB, AC}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$

$$\text{Donc } \begin{cases} R(A) = A \\ AB = AC \\ (\widehat{AB, AC}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi] \end{cases} \text{ donc } R(B) = C$$

On a R d'angle $\frac{\pi}{2}$ donc $R((AC))$ est la droite perpendiculaire à (AC) en $R(A) = A$

or $(AB) \perp (AC)$ en A donc $R((AC)) = (AB)$

$R((BC))$ est la droite perpendiculaire à (BC) en $R(B) = C$

or Δ est perpendiculaire à (BC) et passant par C donc $R((BC)) = \Delta$

b) On $C \in (AC) \cap (BC)$ donc $R(C) \in R((AC)) \cap R((BC))$ donc $R(C) \in (AB) \cap \Delta$

or $(AB) \cap \Delta = \{K\}$ donc $R(C) = K$

On a $I = B * C$ donc $R(I) = R(B) * R(C)$ donc $R(I) = C * K$

Or $J = C * K$ donc $R(I) = J$.

$$\text{b) } \begin{cases} R(A) = E \\ R(B) = D \end{cases} \text{ donc}$$

$$\theta \equiv (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{ED}) [2\pi] \equiv (\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{ED}) [2\pi] \equiv (\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DE}) + \pi [2\pi] \equiv \frac{\pi}{3} + \pi [2\pi] \equiv -\frac{2\pi}{3} [2\pi] \quad \text{et } I \in \text{med}[AE] \cap \text{med}[BD].$$

$$\begin{aligned} \text{2) a) On a } (\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{DE}) &\equiv (\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AB}) + (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DE}) [2\pi] \equiv -(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) + (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{ED}) + \pi [2\pi] \\ &\equiv -\frac{\pi}{3} - \frac{2\pi}{3} + \pi [2\pi] \equiv 0 [2\pi] \end{aligned}$$

Donc $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{DE}$ sont colinéaires et de même sens donc $D \in [AE]$.

$$\text{b) on a } (\overrightarrow{AF}, \overrightarrow{AE}) \equiv (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) [2\pi] \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi] \quad (1)$$

$$(\overrightarrow{FE}, \overrightarrow{FA}) \equiv (\overrightarrow{CE}, \overrightarrow{BA}) [2\pi] \equiv (\overrightarrow{CE}, \overrightarrow{CD}) [2\pi] \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi] \quad (2)$$

de (1) et (2) on a $(\overrightarrow{AF}, \overrightarrow{AE}) \equiv (\overrightarrow{FE}, \overrightarrow{FA}) [2\pi] \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi]$ donc le triangle AFE est équilatéral direct.

c) Le triangle AFE est équilatéral direct donc $AF = AE$ et $(\overrightarrow{AF}, \overrightarrow{AE}) \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi]$

$$(\overrightarrow{AF}, \overrightarrow{AE}) \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi] \Leftrightarrow (\overrightarrow{AF}, \overrightarrow{EA}) \equiv \pi + \frac{\pi}{3} [2\pi] \equiv -\frac{2\pi}{3} [2\pi]$$

$$\begin{cases} R(A) = E \\ AF = EA \\ (\overrightarrow{AF}, \overrightarrow{EA}) \equiv -\frac{2\pi}{3} [2\pi] \end{cases} \Leftrightarrow R(F) = A$$

$$\text{d) } R(F) = A \text{ donc } (\overrightarrow{IF}, \overrightarrow{IA}) \equiv -\frac{2\pi}{3} [2\pi] \text{ et on a } (\overrightarrow{EF}, \overrightarrow{EA}) \equiv -\frac{\pi}{3} [2\pi]$$

on a donc $(\overrightarrow{IF}, \overrightarrow{IA}) \equiv 2(\overrightarrow{EF}, \overrightarrow{EA}) [2\pi]$ donc I est le centre du cercle ζ circonscrit au triangle AEF .

$$\text{3) a) } \begin{cases} CD = CE \\ R'(C) = C \\ (\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{CE}) \equiv -\frac{\pi}{3} [2\pi] \end{cases} \Leftrightarrow R'(D) = E$$

$$\text{On a } (\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CF}) \equiv (\overrightarrow{EA}, \overrightarrow{EF}) [2\pi] \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi] \quad (1)$$

$$\text{et } (\overrightarrow{BF}, \overrightarrow{BC}) \equiv (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi] \quad (2)$$

de (1) et (2) le triangle BFC est équilatéral direct donc $CF = CB$ et $(\overrightarrow{CF}, \overrightarrow{CB}) \equiv -\frac{\pi}{3} [2\pi]$

$$\begin{cases} CF = CB \\ R'(C) = C \\ (\widehat{CF, CB}) \equiv -\frac{\pi}{3} [2\pi] \end{cases} \Leftrightarrow R'(F) = B$$

$$\text{b) } (\widehat{DF, EB}) \equiv -\frac{\pi}{3} [2\pi] \text{ donc } (\widehat{DF, EB}) \neq k\pi ; k \in \mathbb{Z}$$

donc $\overrightarrow{DF}$ et $\overrightarrow{EB}$ ne sont pas colinéaires donc les droites (FD) et (BE) sont sécantes en un point J .

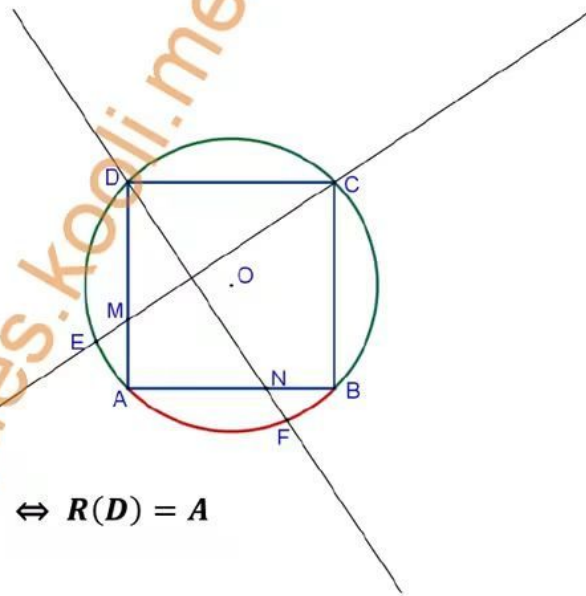
$$\text{c) On a } (\widehat{JD, JB}) \equiv (\widehat{FD, EB}) [2\pi] \equiv (\widehat{DF, EB}) + \pi [2\pi] \equiv -\frac{\pi}{3} + \pi [2\pi] \equiv \frac{2\pi}{3} [2\pi]$$

$$\text{4) On a } R \text{ de centre } I \text{ et d'angle } -\frac{2\pi}{3} \text{ et on a } R(B) = D \text{ donc } (\widehat{IB, ID}) \equiv -\frac{2\pi}{3} [2\pi]$$

donc $(\widehat{ID, IB}) \equiv \frac{2\pi}{3} [2\pi]$ donc $(\widehat{JD, JB}) \equiv (\widehat{ID, IB}) [2\pi]$ donc I, J, B et D sont sur un même cercle

Exercice 7

1) a)



$$\text{b) } \begin{cases} OD = OA \\ (\widehat{OD, OA}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi] \end{cases} \Leftrightarrow R(D) = A$$

$$\begin{cases} OC = OD \\ (\widehat{OC, OD}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi] \end{cases} \Leftrightarrow R(C) = D$$

c) $R \circ R$ est la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$ donc $R \circ R$ est la symétrie centrale de centre O

donc $R \circ R = S_O$

$$\text{d) } S_O(D) = B \text{ donc } (R \circ R)(D) = B \text{ or } (R \circ R)(D) = R(R(D)) = R(A) \text{ donc } R(A) = B$$

2) a) On a $R(A) = B$ et $R(D) = A$ donc $R([AD]) = [AB]$

On a $R((MC))$ est la droite perpendiculaire à (MC) en $R(C) = D$ (car R est d'angle $\frac{\pi}{2}$

) or (MC) est perpendiculaire à (DN) en D donc $R((MC)) = (DN)$

b) On a $M \in (MC)$ donc $R(M) \in R((MC))$ donc $R(M) \in (DN)$

On a $M \in [AD]$ donc $R(M) \in R([AD])$ donc $R(M) \in [AB]$

Donc $R(M) \in (DN) \cap [AB]$ or $(DN) \cap [AB] = \{N\}$ donc $R(M) = N$

c) On a $\begin{cases} C \neq D \\ R(C) = D \\ R(M) = N \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} CM = DN \\ (\overrightarrow{CM}, \overrightarrow{DN}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi] \end{cases} \quad CM = DN \text{ et } (CM) \perp (DN).$

3) a) Posons $R(E) = E'$ on a $R(C) = D$ donc $EC = E'D$

or $E \in [CM)$ donc $R(E) \in ([CM))$ donc $E' \in [DN)$ or $F \in [DN)$ et $EC = FD$ donc $R(E) = F$.

b) On a ζ de centre O et de rayon $r = OA$ donc l'image de ζ par R est le cercle de centre $R(O) = O$ et de rayon $r' = OA$ donc l'image de ζ par R est le cercle ζ .

c) Quand M varie sur le segment $[AD] \setminus \{A, D\}$ le point E varie sur l'arc $\widehat{AD} \setminus \{A, D\}$ du cercle ζ et on a l'image de ζ par R est ζ donc l'image de sur l'arc $\widehat{AD} \setminus \{A, D\}$ est sur l'arc $\widehat{AB} \setminus \{A, B\}$

donc F appartient à l'arc $\widehat{AB} \setminus \{A, B\}$

donc l'ensemble des points F lorsque M varie sur le segment $[AD] \setminus \{A, D\}$

et l'arc $\widehat{AB} \setminus \{A, B\}$.