

Chapitre V

Nombre dérivé

■ Nombre dérivé en un point :

Soit f définie sur un intervalle I contenant x_0 .

f est dérivable en a et $f'(a)$ est appelé le nombre dérivé de f en a ;

$$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \ell \text{ et } \ell \in \mathbb{R} ; \text{ on note : } f'(a) = \ell$$

$$\Leftrightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \ell \text{ et } \ell \in \mathbb{R}.$$

- **La vitesse :** soit $d(t)$ est la distance parcourue à l'instant t .

La vitesse instantané à l'instant t_0 du mobile est égale à

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{d(t_0+h) - d(t_0)}{h} = d'(t_0)$$

■ Approximation affine d'une fonction

- **Théorème :** soit f une fonction dérivable en a

Une valeur approchée de $f(a+h) \approx f(a) + f'(a) \times h$

On dit alors que :

- $f(a) + f'(a) \times h$ est une approximation affine de f en a

- **Exemple:** Pour trouver une approximation affine de $\sqrt{1+h}$ pour h voisin de 0.

* On considère la fonction $f(x) = \sqrt{x}$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)}{(x - 1)(\sqrt{x} + 1)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{(x - 1)(\sqrt{x} + 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\sqrt{x} + 1} = \frac{1}{2} = f'(1)$$

donc l'approximation affine de $\sqrt{1+h}$ au voisin de 0 est

$$f(1)h + f(1) = \frac{1}{2}h + 1$$

■ Dérivabilité à droite- dérivabilité à gauche :

f définie sur $]a - h, a]$

f est dérivable à gauche en a

$$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \ell ; \ell \in \mathbb{R}$$

et on note $\ell = f'_g(a)$.

f définie sur $[a, a + h[$

f est dérivable à droite en a

$$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \ell ; \ell \in \mathbb{R}$$

et on note $\ell = f'_d(a)$.

f définie sur $]a - h, a + h[$; f est dérivable en $a \Leftrightarrow f'_d(a) = f'_g(a)$

■ **dérivabilité et continuité :**

- **théorème :** Si f est dérivable en a alors f est continue en a .

Remarque : Si f est continue en a , alors on ne peut rien conclure pour la dérivabilité en a .

■ **Interprétation géométrique du $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$:**

- 1^{er} cas : f est dérivable en a :

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \ell = f'(a)$$

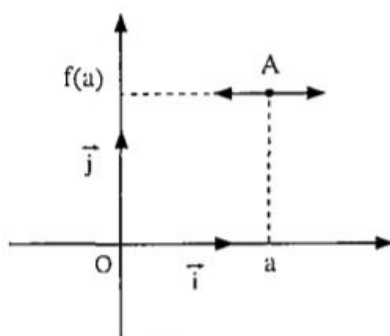
On dit que ζ la courbe de f admet une tangente

$$\Delta : y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

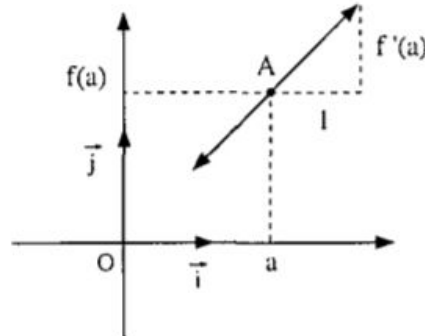
au point $A(a, f(a))$ de coefficient directeur $f'(a)$ et de vecteur directeur :

$$\vec{U} \begin{pmatrix} 1 \\ f'(a) \end{pmatrix} \text{ dans une base } (\vec{i}, \vec{j}).$$

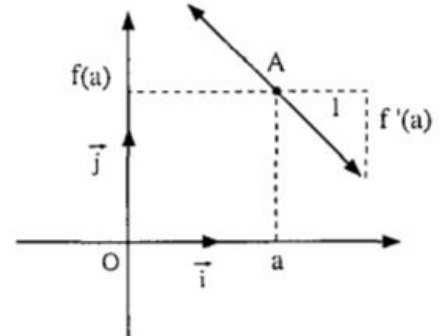
Si $f'(a) = 0$



Si $f'(a) > 0$



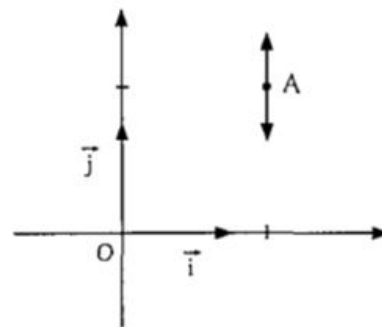
Si $f'(a) < 0$



2^{ème} cas : f n'est pas dérivable en a :

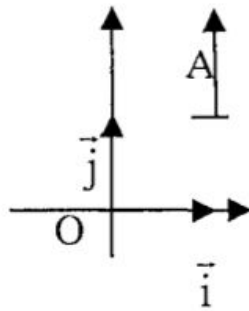
➤ $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = +\infty \text{ ou } -\infty.$

On dit que ζ la courbe de f , admet une tangente verticale



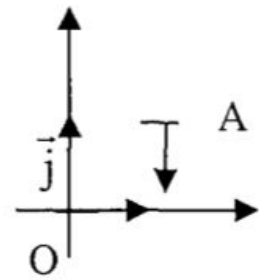
$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = +\infty \text{ figure}$$

ζ admet en A,
une demi-
tangente verticale
dirigée vers les y
positifs.



$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = -\infty \text{ figure}$$

ζ admet en A,
une demi tangente
verticale
dirigée
vers les y
négatifs.



$$\triangleright \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \neq \lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

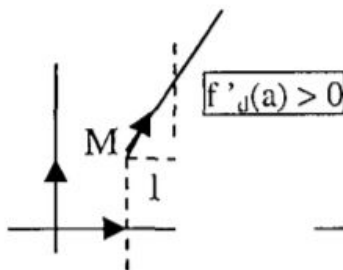
avec des limites finies.

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'_d(a)$$

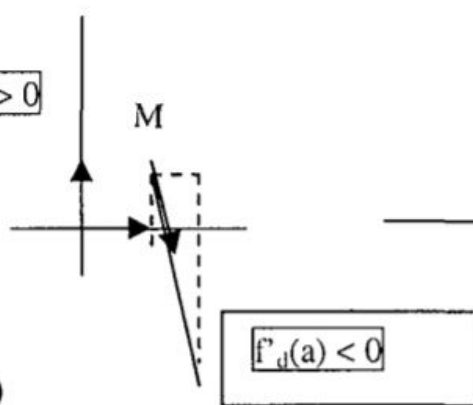
$\Leftrightarrow \zeta_f$ admet une demi tangente au point M (a,f(a)) d'équation :

$$y = f'_d(a)(x - a) + f(a) \text{ et } x \geq a \text{ de vecteur directeur } \vec{u}_d \begin{pmatrix} 1 \\ f'_d(a) \end{pmatrix}$$

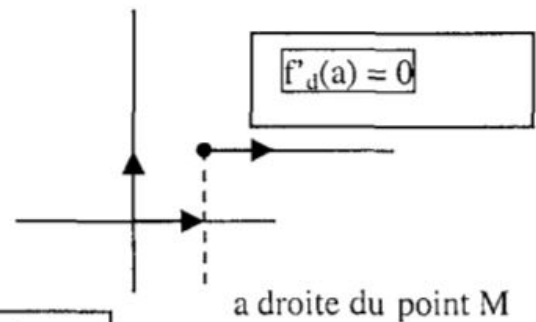
$$* f'_d(a) > 0$$



$$* f'_d(a) < 0$$



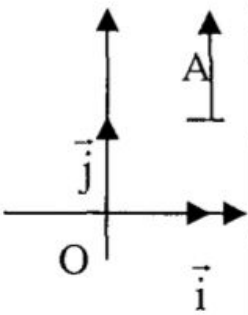
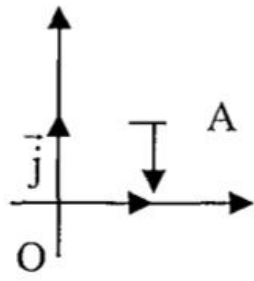
$$* f'_d(a) = 0$$



$$* \lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'_g(a)$$

$\Leftrightarrow \zeta_f$ admet une demi tangente au point M(a,f(a)) d'équation

$$y = f'_g(a)(x - a) + f(a) \text{ et } x \leq a \text{ de vecteur directeur } \vec{u}_g \begin{pmatrix} 1 \\ f'_g(a) \end{pmatrix}$$

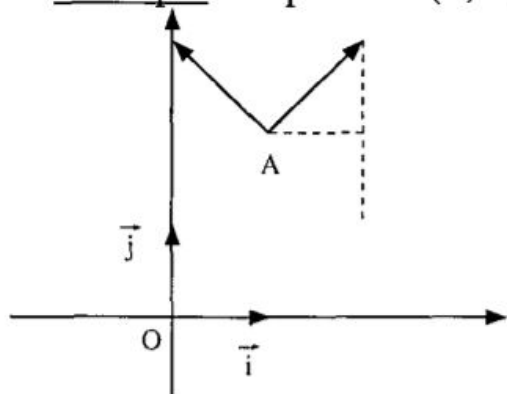
$\lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = -\infty$ ζ admet en A, une demi-tangente verticale dirigée vers les y positifs 	$\lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = +\infty$ ζ admet en A, une demi-tangente verticale dirigée vers les y négatifs. 
--	---

➤ **Point anguleux :**

Si les deux demi-tangentes en A ne sont pas portées par la même droite,

On dit que le point A est un point anguleux.

Exemple : le point A (1, 2) et $f_d'(1) = 1$ et $f_g'(1) = -1$



■ **Remarque :**

➤ f est dérivable en a et la tangente en A (a, f(a)), a pour équation :

$$T : y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

Soit $\Delta : y = mx + p$ (avec m et p deux réels donnés)

Pour déterminer le point A (x_0, y_0) de la courbe tel que Δ soit tangente.

Il suffit de résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} f'(x_0) = m \\ y_0 = f(x_0) = mx_0 + p \end{cases}$$

Pour déterminer la position d'une tangente et d'une droite $\Delta : y = mx + p$:

$$* \begin{cases} T // \Delta \Leftrightarrow f'(a) = m \\ T \perp \Delta \Leftrightarrow f'(a) \times m = -1 \end{cases}$$

■ Dérivées de quelques fonctions usuelles .

fonction f	f'(a)
$f(x) = c$ constante	$f'(a) = 0$
$f(x) = \alpha x + \beta$	$f'(a) = \alpha$
$f(x) = (x - \alpha)^2 + \beta$	$f'(a) = 2(a - \alpha)$
$f(x) = \frac{1}{\alpha x + \beta}$	$f'(a) = \frac{-1}{(\alpha a + \beta)^2}$
$f(x) = \sqrt{x + \alpha}$	$f'(a) = \frac{1}{2\sqrt{a + \alpha}}$
$f(x) = \frac{\alpha x + \beta}{\delta x + \lambda}$	$f'(a) = \frac{\alpha \lambda - \beta \delta}{(\delta a + \lambda)^2}$
$f(x) = x^n$	$f'(a) = n \times a^{n-1}$

• Opérations sur les fonction dérivables en a :

Théorème :

- Si f et g sont 2 fonctions dérivables en a

Alors $f + g$, $f \times g$ et $\alpha f + \beta g$ sont dérivables en a et on a :

$$* (f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$$

$$* (f \times g)'(a) = f'(a).g(a) + f(a).g'(a)$$

$$* (\alpha f + \beta g)'(a) = \alpha f'(a) + \beta g'(a)$$

$$* (f^n)'(a) = n f^{n-1}(a).f'(a) \quad \text{avec } n \in \mathbb{N}_* \setminus \{1\}$$

$$* \left(\frac{1}{f} \right)'(a) = \frac{-f'(a)}{f^2(a)} \quad \text{si } f(a) \neq 0$$

$$* \left(\frac{f}{g} \right)'(a) = \frac{f'(a).g(a) - g'(a)f(a)}{g^2(a)}$$

$$\text{théorème : } \left. \begin{array}{l} f \text{ est dérivable en } a \\ f(a) > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow (\sqrt{f})'(a) = \frac{f'(a)}{2\sqrt{f(a)}}$$

Exemple : $f(x) = \sqrt{4x+1}$. Déterminer le nombre dérivé en 1.

$$\text{On pose } u(x) = 4x+1 \text{ alors } f'(1) = \frac{u'(1)}{2\sqrt{u(1)}} = \frac{4}{2\sqrt{4+1}} = \frac{4}{2\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$$