

Chapitre V

Les nombres complexes

1) L'ensemble des nombres complexes :

$\mathbb{C}$ est l'ensemble des éléments notés $x + iy$ avec x et y des réels quelconques tels que :

- $i^2 = -1$.
- Les règles de calculs dans $\mathbb{R}$ s'appliquent dans $\mathbb{C}$.

2) Forme algébrique ou cartésienne d'un nombre complexe :

- Tout nombre complexe Z s'écrit, de façon unique, sous la forme :
 $Z = x + iy$ où x et y sont des réels.
- x est la partie réelle de Z qu'on note $\text{Ré}(Z)$.
- y est la partie imaginaire de Z qu'on note $\text{Im}(Z)$.

3) Propriétés :

Z et Z' deux nombres complexes tels que $Z = x + iy$ et $Z' = x' + iy'$.

- $Z + Z' = (x + x') + i(y + y')$; $ZZ' = (xx' - yy') + i(xy' + x'y)$.
- $Z = Z' \Leftrightarrow x = x'$ et $y = y'$.
- Z est réel $\Leftrightarrow \text{Im}(Z) = 0$.
- Z est imaginaire pur $\Leftrightarrow \text{Ré}(Z) = 0$.
- $Z = 0 \Leftrightarrow x = 0$ et $y = 0$.

4) Nombres complexes conjugués :

- Le conjugué du nombre complexe $Z = x + iy$ où x et y sont des réels est le nombre $\bar{Z} = x - iy$.

- Z est réel $\Leftrightarrow Z = \bar{Z}$.
- Z est imaginaire pur $\Leftrightarrow Z = -\bar{Z}$.

- Quels que soient les nombres complexes Z et Z' :

$$\overline{Z + Z'} = \bar{Z} + \bar{Z}'$$

$$\overline{Z \cdot Z'} = \bar{Z} \cdot \bar{Z}'$$

$$\text{Si } Z' \neq 0 ; \left(\frac{Z}{Z'} \right) = \frac{\bar{Z}}{\bar{Z}'}$$

5) Affixe : d'un point – d'un vecteur :

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

- Affixe d'un point : A tout point M de coordonnées (x, y) , on associe le nombre complexe $Z = x + iy$, appelé affixe du point M , noté $M(Z)$.

- Affixe d'un vecteur : A tout vecteur $\vec{W} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ on associe le nombre

complexe $Z = x + iy$, appelé affixe du vecteur $\vec{W}$, noté $\text{aff}(\vec{W})$.

- * $M \in (O, \vec{u}) \Leftrightarrow Z$ est réel.
- * $M \in (O, \vec{v}) \Leftrightarrow Z$ est imaginaire pur.

■ A et B deux points d'affixes respectives Z_A et Z_B

alors l'affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$ noté :

$$\text{aff}(\overrightarrow{AB}) = Z_B - Z_A = Z_{\overrightarrow{AB}}$$

I le milieu de $[AB]$ est d'affixe

$$Z_I = \frac{Z_A + Z_B}{2}$$

6) Module d'un nombre complexe :

■ Le module d'un nombre complexe $Z = x + iy$ est :

$$|Z| = \sqrt{Z \cdot \bar{Z}} = \sqrt{x^2 + y^2} = OM.$$

■ Quel que soient les nombres complexes on a :

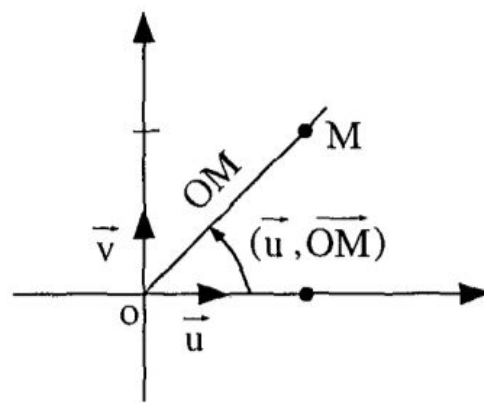
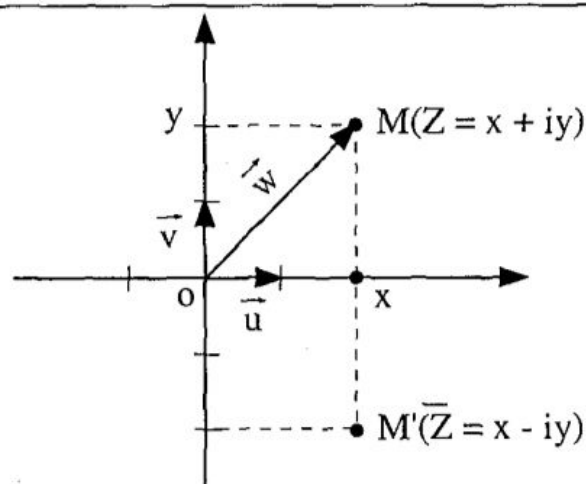
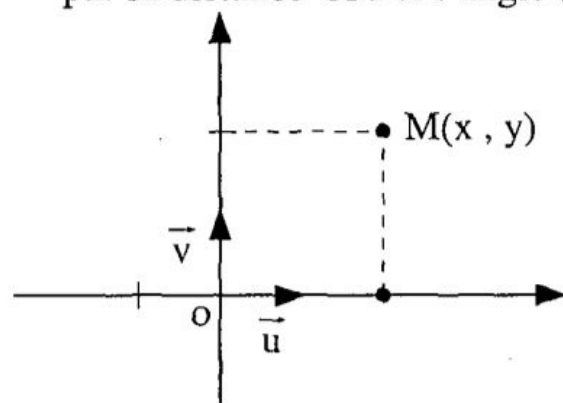
$ Z = 0 \Leftrightarrow Z = 0$	$ Z \cdot Z' = Z \cdot Z' $	$ Z = \bar{Z} $
Si $Z' \neq 0$; $\frac{ Z }{ Z' } = \frac{ Z }{ Z' }$	n entier relatif ; $ Z^n = Z ^n$	
$ Z + Z' \leq Z + Z' $	$ Z = 1 \Leftrightarrow Z \cdot \bar{Z} = 1 \Leftrightarrow \bar{Z} = \frac{1}{Z}$	

7) Représentation géométrique d'un nombre complexe :

$(O, \vec{u}, \vec{v})$ un repère orthonormé du plan.

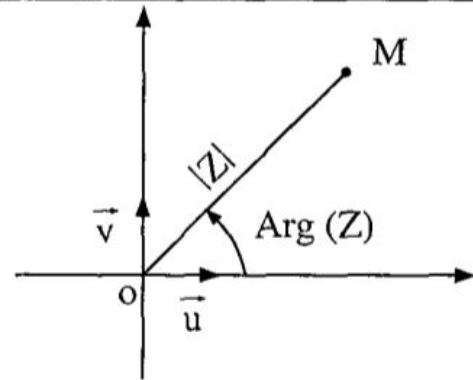
■ Tout point du plan distinct de l'origine O est repéré de deux façons :

- * par ses coordonnées (x, y) .
- * par sa distance OM et l'angle $(\vec{u}, \overrightarrow{OM})$.



■ Soient $M(x, y)$ et $Z = x + iy$ donc $M(Z)$, Le module de $|Z|$ est OM .

* $Z \neq 0$, alors un argument de Z est une mesure en radians de l'angle $(\vec{u}, \vec{OM})$;
noté $\text{Arg}(Z) \equiv (\vec{u}, \vec{OM})(2\pi)$.



8) Ecriture trigonométrique d'un nombre complexe non nul :

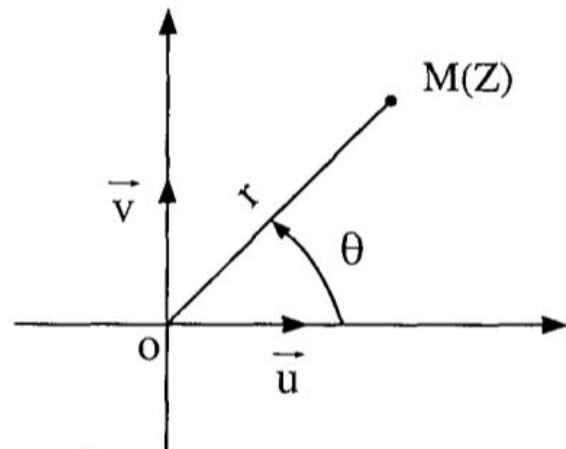
Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

■ Si $Z \neq 0$, $Z = x + iy$ ou x et y sont deux réels.

$$\text{Arg}(Z) = \theta \text{ et } |Z| = \sqrt{x^2 + y^2} = r$$

$$\cos \theta = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \text{ et } \sin \theta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$Z = x + iy = \sqrt{x^2 + y^2} \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + i \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) = r(\cos \theta + i \sin \theta).$$



L'écriture $Z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ est la forme trigonométrique de Z .

L'écriture $Z = [r, \theta]$ est la forme polaire de Z .

a) 0 n'a pas de forme trigonométrique.

b) Tous les arguments de Z sont de la forme $\theta + 2k\pi$.

9) Propriétés :

Pour tout nombre complexe non nul Z et Z' tels que :

$Z = [r, \theta]$, $Z' = [r', \theta']$. Alors on a :

a) $Z \cdot Z' = [r r', \theta + \theta'] = r r' (\cos(\theta + \theta') + i \sin(\theta + \theta'))$

b) $Z' \neq 0$; $\frac{Z}{Z'} = [\frac{r}{r'}, \theta - \theta'] = \frac{r}{r'} (\cos(\theta - \theta') + i \sin(\theta - \theta'))$

c) $Z^n = [r^n, n\theta] = r^n (\cos(n\theta) + i \sin(n\theta))$

d) $Z = Z' \Leftrightarrow r = r' \text{ et } \theta = \theta' + 2k\pi$

■ **Equation de la forme $Z^2 = \alpha$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$**

Si $\alpha = 0$ alors $Z^2 = 0 \Leftrightarrow Z = 0$

Si $\alpha \neq 0$ alors $Z^2 = \alpha \Leftrightarrow Z = i\sqrt{|\alpha|}$ ou $Z = -i\sqrt{|\alpha|}$

▪ **Astuces** : Pour simplifier un rapport, il est souvent intéressant de mettre i en facteur au numérateur avant de se jeter sur l'expression conjuguée du dénominateur.

Exemple :
$$\frac{-10+4i}{2+5i} = \frac{i(10i+4)}{2+5i} = \frac{2i(2+5i)}{2+5i} = 2i$$

▪ **Réflexes** :

Situations	Réflexes
On dit : Ecrire Z sous forme trigonométrique	1) On utilise la méthode direct module et argument (mise en facteurs...) 2) utiliser l'écriture polaire Si on a $\frac{Z_1}{Z_2}$ où $Z_1 Z_2$ où Z_1^2
On dit calculer Z élevé à une grande puissance (Exp. : Z^{2006})	On écrit Z sous forme trigonométrique puis On cherche une mesure principale de l'argument de cette puissance.
On doit déterminer l'ensemble des points $M(Z)$ Tel que $Z = \frac{az+b}{cz+d}$ vérifie une propriétés d'appartenance (réel où imaginaire où réel non nul,...) → Si on a module	* On privilège la méthode géométrique : On utilisant Argument et on caractérise l'ensemble chercher à l'aide des angles orientés * Si non la méthode algébrique on pose $z = x + iy$ et on retrouve l'équation d'une droite, cercle, arc, segment → On remplace par les distance
On doit déterminer la nature d'un triangle	On calcul les 3 distances (les modules) du triangle et précisera la nature des triangles.

Attention : * $|a+ib| = \sqrt{a^2+b^2}$ et non $|a+ib| = \sqrt{a^2+(ib)^2}$

* il faut pas écrire $\overline{z_1 + iz_2} = z_1 - iz_2$ mais la bonne réponse est $\overline{z_1} - i\overline{z_2}$ car z_1 et $z_2 \in \mathbb{C}$

• Remarque : il n'y a pas de relation d'ordre dans $\mathbb{C}$ ($\geq$, $<$).