

Exercice 1 :

Soit la fonction $f : x \mapsto x^2 - 2x - 2$

- Calculer le nombre dérivé de f en $x_0 = 3$
- Construire, dans un repère cartésien, la tangente T à la courbe de f au point $M_0(x_0, f(x_0))$
- Donner une équation de T

Exercice 2 :

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 3x + 3} - 1}{x - 2} & \text{si } x \neq 2 \\ f(2) = k \quad (k \in \mathbb{R}) \end{cases}$$

- Montrer qu'il existe une valeur k_0 de k , que l'on déterminera, pour laquelle f est continue en 2
- Pour $k = k_0$, montrer que f est dérivable en 2
Déterminer, dans ce cas, une équation cartésienne de la tangente (T) à la courbe (C) représentative de f au point M_0 d'abscisse 2

Exercice 3 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{1-x}{1+x^2} & \text{si } x < 1 \\ f(x) = \sqrt{2x-1} - x & \text{si } 1 \leq x \leq 5 \\ f(x) = x - \sqrt{x+1} & \text{si } x > 5 \end{cases}$$

- Étudier la continuité de f en 1 et en 5
- f est-elle dérivable en 5 ?
- Étudier la dérivabilité de f en 1. Interpréter géométriquement les résultats

Exercice 4 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = mx + \sqrt{1-x} & \text{si } x \leq 1 \\ f(x) = x^2 - x + 1 & \text{si } 1 < x < 2 \\ f(x) = \frac{x+1}{x-1} & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

- Déterminer le réel m pour que f soit continue en 1
- Étudier la dérivabilité de f en 2
- Soit $x_0 \in]2, +\infty[$, calculer $f'(x_0)$
 - Déterminer l'abscisse du point de la courbe de la restriction de f à l'intervalle $]2, +\infty[$ où la tangente est parallèle à la droite $\Delta : x + 2y - 1 = 0$
 - Donner une équation de la tangente T à la courbe de f en son point d'abscisse 3

Exercice 5 :

Soient les fonctions $f : x \mapsto \frac{1}{x+1}$ et $g : x \mapsto \sqrt{x+1}$

- Justifier que chacune de ces fonctions sont dérivables en 0 et calculer $f'(0)$ et $g'(0)$
- Déterminer les approximations affine de f et g au voisinage de 0
- Calculer alors : $\frac{1}{1,008}$; $\frac{1}{0,996}$; $\sqrt{1,0002}$ et $\sqrt{0,995}$

Exercice 6 ☺

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \sqrt{x+1} & \text{si } x > 0 \\ f(x) = x^2 + x + 1 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

- Montrer que f est continue en 0.

- 2- a- Étudier la dérivabilité de f à gauche et à droite en 0.
b- Déduire que f n'est pas dérivable en 0 et donner les équations des demi-tangentes à la courbe représentative (C) au point d'abscisse 0.
- 3- a- Soit $a < 0$, donner $f'(a)$
b- Écrire l'équation de la tangente (T) à la courbe (C) au point d'abscisse -1
c- Étudier la position relative de (C) par rapport à la tangente (T)

Exercice 7 :

Soit (C_f) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(0, \vec{i}, \vec{j})$

(Voir figure)

1°) Répondre par vrai ou faux en justifiant la réponse

a) $f'(-4) < 0$

b) $f'(1) < 0$

2°) Par une lecture graphique, Calculer : $f'(-4)$, $f'(-2)$, $f'(0)$ et $f'(1)$

3°) Soient T_{-4} , T_{-2} et T_1 les tangentes à (C_f) respectives aux points d'abscisses -4 , -2 et 1 .

Répondre par vrai ou faux en justifiant la réponse.

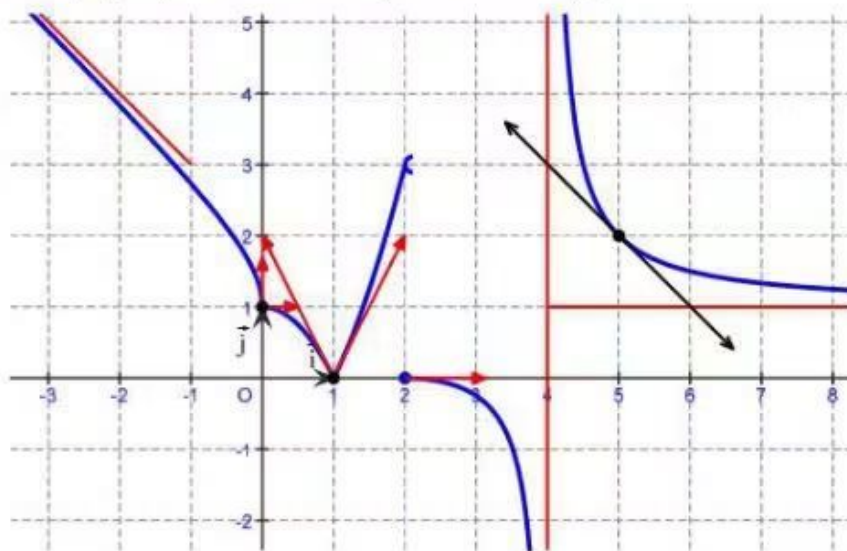
a) T_{-4} est parallèle à T_{-2}

b) T_{-4} est perpendiculaire à T_1

Exercice 8 :

Le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

(C_f) la représentation graphique d'une fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{4\}$



Par lecture graphique :

1. Déterminer : $f(0)$; $f(1)$; $f(2)$ et $f(5)$
2. Déterminer : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$; $\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 4^+} f(x)$
3. Déterminer : $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$
4. Déterminer les asymptotes à (C_f)
5. a) Identifier les points où f n'est pas dérivable
b) Déterminer l'équation de la tangente ou demi-tangente à (C_f) aux points d'abscisses respectives 0, 1, 2 et 5
6. Déterminer les limites suivantes : $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) + x - 2)$; $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)-1}{x}$; $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)-1}{x}$; $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{f(x)}{x-2}$; $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{f(x)-2}{x-5}$; $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x)}{x-1}$ et $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x)}{x-1}$

Nombre Dérivé

Définition : Soit f une fonction définie sur un intervalle I et $a \in I$.

On dit que f est dérivable en a , si et seulement si $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \ell$ (finie)

Vocabulaire : Le réel ℓ est appelé le nombre dérivé de f en a noté : $f'(a)$

Remarque : $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a)$

Conséquence : Si f est dérivable en a alors la courbe $\mathcal{C}_f$ admet au point $A(a, f(a))$ une tangente d'équation : $y = f'(a)(x - a) + f(a)$

$f'(a)$: est le coefficient directeur (ou la pente) de cette tangente

$\vec{u}\left(\frac{1}{f'(a)}\right)$: est un vecteur directeur de cette tangente en A

Théorème : * Si f est dérivable en $a \implies f$ est continue en a

* Si f n'est pas continue en $a \implies f$ n'est pas dérivable en a

Dérivabilité à droite – Dérivabilité à gauche

A gauche : f est dérivable à gauche en $a \iff \lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'_g(a)$ finie

A droite : f est dérivable à droite en $a \iff \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'_d(a)$ finie

Théorème : f est dérivable en $a \iff f'_g(a) = f'_d(a)$

Interprétation graphique de la dérivabilité :

• si f dérivable en $a \implies \mathcal{C}_f$ admet en A une tangente : $y = f'(a)(x - a) + f(a)$

• si $f'(a) = 0 \implies \mathcal{C}_f$ admet en A une tangente horizontale (parallèle à $(O\vec{i})$)

• si $f'_g(a) = 0 \implies \mathcal{C}_f$ admet à gauche en A une demi tangente horizontale

• si $f'_d(a) = 0 \implies \mathcal{C}_f$ admet à droite en A une demi tangente horizontale

• si $f'(a) = \pm\infty \implies \mathcal{C}_f$ admet en A une tangente verticale (parallèle à $(O\vec{j})$)

• si $f'_g(a) = +\infty \implies \mathcal{C}_f$ admet en A une demi tangente verticale dirigée vers le bas

• si $f'_g(a) = -\infty \implies \mathcal{C}_f$ admet en A une demi tangente verticale dirigée vers le haut

• si $f'_d(a) = +\infty \implies \mathcal{C}_f$ admet en A une demi tangente verticale dirigée vers le haut

• si $f'_d(a) = -\infty \implies \mathcal{C}_f$ admet en A une demi tangente verticale dirigée vers le bas

• si $f'_g(a) \neq f'_d(a)$ alors f n'est pas dérivable en a et $\mathcal{C}_f$ admet en A un point anguleux formé par 2 demis tangentes d'équation :

$$\begin{cases} T_g : y = f'_g(a)(x - a) + f(a) \\ T_d : y = f'_d(a)(x - a) + f(a) \end{cases}$$

Approximation affine d'une fonction

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et a un point de I , si f est dérivable en a alors le réel : $f(a) + f'(a) \cdot h$ est une approximation affine de $f(a + h)$ et on écrit :

$$f(a + h) \approx f(a) + f'(a) \cdot h \text{ pour } h \text{ voisin de zéro.}$$

Fonctions Dérivées

1) Dérivabilité sur un intervalle :

Définition : f est dérivable sur un intervalle $I \iff f$ dérivable en tout point a de I

Notation : $I = D_f$ **Théorème :** on a toujours : $D_f \subseteq D_g \subseteq D_h$

Dérivabilité des fonctions de base :

- ① f polynôme $\implies f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$
- ② f rationnelle $\implies f$ est dérivable sur D_f
- ③ $\sqrt[n]{f}$ est dérivable ssi f dérivable et $f(x) > 0$ (existence des $1/2$ tangentes verticales)
- ④ $|f|$ est dérivable ssi f est dérivable et $f(x) \neq 0$ (existence des points anguleux)

Formules des Fonctions Dérivées

Dérivée Usuelles :

f	f'
λ	0
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
x^n	$n \cdot x^{n-1}$
$ax + b$	a
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$\frac{ax + b}{cx + d}$	$\frac{ad - bc}{(cx + d)^2}$

Opérations avec les dérivées :

f	f'
$f + g$	$f' + g'$
f^n	$n \cdot f' \cdot f^{n-1}$
$\frac{1}{f}$	$-\frac{f'}{f^2}$
$\sqrt[n]{f}$	$\frac{f'}{n \sqrt[n]{f}}$
$f \times g$	$f' \cdot g + f \cdot g'$
$\frac{f}{g}$	$\frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$
$f(ax + b)$	$a \cdot f'(ax + b)$

Sens de Variations d'une fonction :

- ① si $f'(x) \geq 0$ sur $I \implies f$ est croissante ($\nearrow$) sur I
- ② si $f'(x) \leq 0$ sur $I \implies f$ est décroissante ($\searrow$) sur I

Extrémum :

Maximum : f admet un maximum en $x_0 \iff f'$ s'annule en x_0 et change de signe de $+$ vers $-$.

Minimum : f admet un minimum en $x_0 \iff f'$ s'annule en x_0 et change de signe de $-$ vers $+$.

Théorèmes : * f admet un extréma en $x_0 \implies f'(x_0) = 0$

* f' s'annule en x_0 et change de signe $\iff f$ admet un extréma en x_0

Série N° 07 Nombres Dérivés

Exercice N° 01 : Etudier la dérivabilité de chacune des fonctions f au point d'abscisse a et donner l'équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ en ce point où $\mathcal{C}_f$ est la courbe de f :

1) $f(x) = x^2 + 1$; $a = 1$

2) $f(x) = \frac{1}{2x+3}$; $a = -1$

3) $f(x) = \frac{x-2}{3x-1}$; $a = 3$

4) $f(x) = (x+1)^3$; $a = 0$

5) $f(x) = \frac{x^2-x+1}{2-x}$; $a = -2$

6) $f(x) = \frac{-3}{x^2+1}$; $a = -1$

Exercice N° 02 : Etudier la dérivabilité des fonctions f suivantes aux points d'abscisse a' et a'' et interpréter graphiquement les résultats :

1) $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x}$ et $a' = 3$ puis $a'' = 2$

2) $f(x) = \sqrt{-x^2 + 5x - 4}$ et $a' = 1$ puis $a'' = 4$

3) $f(x) = \sqrt{x^2 - 1} + x$ et $a' = -1$ puis $a'' = 2$

Exercice N° 03 : Etudier la dérivabilité des fonctions suivantes au point a et interpréter les résultats :

1) $f(x) = |x^2 - 3x|$ et $a' = 3$; $a'' = 2$

2) $f(x) = x|x-1| + 2x + 1$ et $a = 1$

3) $f(x) = |2-x|\sqrt{x-2}$ et $a = 2$

Exercice N° 04 : Soit f la fonction définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{2x+3}{x} & \text{si } x \geq 3 \\ f(x) = b(x-3) + a\sqrt{x^2-3x+9} & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

1) Déterminer a pour que f soit continue en 3

2) a) Montrer que f dérivable à droite en 3

b) Déterminer b pour que f soit dérivable en 3

Exercice N° 05 : Soit f la fonction définie par :

$$\begin{cases} f(x) = x^2 + x - 6 & \text{si } x \leq 2 \\ f(x) = \sqrt{x^2 - 4} + x - 2 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

1) Montrer que f est continue en 2.

2) Etudier la dérivabilité de f en 2

3) Déterminer le point M_0 d'abscisse $x_0 < 2$ auquel la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ est horizontale.

4) a) Soit $\alpha > 2$. Montrer que f est dérivable en α et calculer $f'(\alpha)$

b) Déterminer le point N_0 de $\mathcal{C}_f$ d'abscisse $x_0 > 2$ où la tangente en ce point N_0 est parallèle à la droite $\Delta: y = \left(\frac{2}{\sqrt{3}} + 1\right)x - 2$

Exercice N° 05 :

1) Soit f et g 2 fonctions dérivables sur I et $a \in I$.

Montrer que si $f(a) = g(a) = 0$ et $g'(a) \neq 0$

alors $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}$

2) Dédurre les limites suivantes : $\bullet \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - x - 2}{x + 1}$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2} - 2}{2x - 4} \quad \bullet \lim_{x \rightarrow 5} \frac{3x - 15}{(x+2)(\sqrt{x-1} - 2)}$$

Approximation Affine

Exercice N° 06 :

1) Soit h un réel proche de zéro. Montrer que :

a) $(1+h)^3 \approx 1 + 3h$ b) $(1+h)^n \approx 1 + nh$

c) $\sqrt{1+h} \approx 1 + \frac{1}{2}h$ d) $\frac{1}{1+h} \approx 1 - h$

2) Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x + 5$$

a) Déterminer le nombre dérivé de f en 2

b) Estimer $f(2,00001)$ et $f(1,99999)$

c) Comparer les résultats avec ceux affichés par la calculatrice

3) Soit la fonction définie : $\phi(x) = \sqrt{4x+3}$

a) Déterminer le nombre dérivé de ϕ en 5

b) Estimer $\sqrt{25,0004}$ et comparer le résultat avec celui affiché par la calculatrice

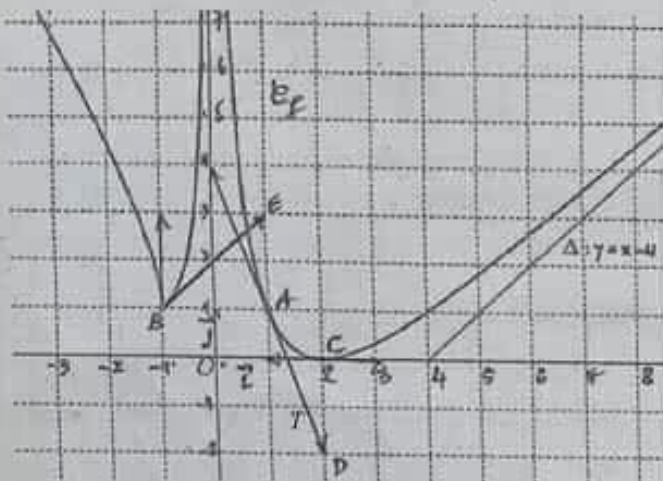
c) Donner une approximation de $\sqrt{4,008}$

Exercices Généraux

Exercice N° 07 :

Dans la figure ci-après, on a représenté dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ la courbe $\mathcal{C}_f$ d'une fonction définie sur $\mathbb{R}^*$. On sait que :

- La droite $\Delta: y = x - 4$ est asymptote à la courbe $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$
- La droite $x = 0$ est asymptote à la courbe $\mathcal{C}_f$



1) Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x]$

2) Déterminer $f'(2)$, $f'(1)$ et $f'_d(-1)$.

Donner une approximation affine du réel $f(0,998)$

3) Déterminer $\lim_{x \rightarrow (-1)^-} \frac{f(x) - 1}{x + 1}$

4) Soit g la fonction définie sur $]0, 2[$ par : $g(x) = \sqrt{f(x)} + x$

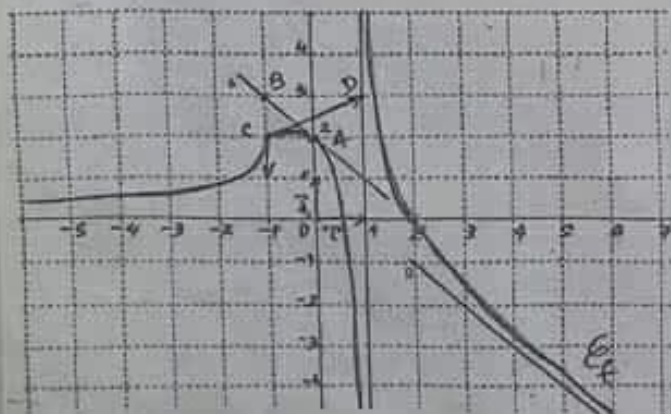
a) Montrer que $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(x) - g(1)}{x - 1} = -\frac{1}{2}$

b) Donner alors une équation cartésienne de la tangente à la courbe de g au point d'abscisse 1.

Exercice N° 08 :

Dans la figure ci-contre on a représenté

dans $(O, \vec{i}, \vec{j})$ la courbe $\mathcal{C}_f$ d'une fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$. Les droites $\Delta_1: y = -x + 1$, $\Delta_2: y = 0$ et $\Delta_3: x = 1$ sont des asymptotes à la courbe $\mathcal{C}_f$



1) Déterminer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) + x]$

$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{f(x)}$ $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{f(x)}$

2) Déterminer $f'(0)$ puis donner une équation cartésienne de la tangente T à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0.

3) Donner une approximation affine de $f(0,01)$

4) a) f est-elle dérivable à gauche en (-1) ? Justifier.

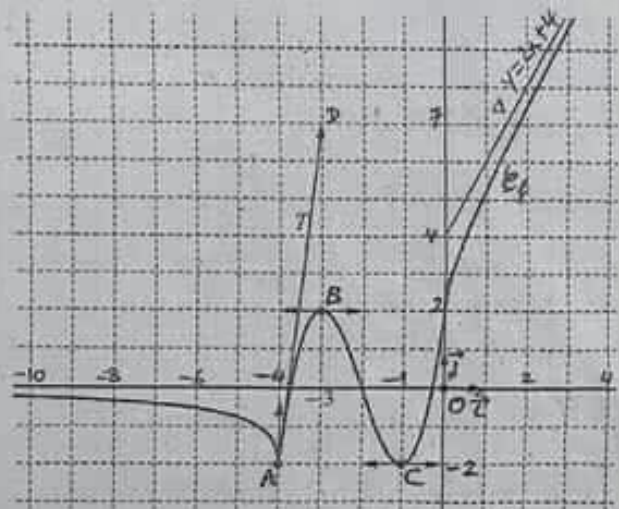
b) Déterminer alors $\lim_{x \rightarrow (-1)^-} \frac{f(x) - 2}{x + 1}$

5) Déterminer $f'_d(-1)$ puis donner une équation de la demi-tangente à $\mathcal{C}_f$ à droite en (-1) .

Exercice N° 09 :

Dans la figure ci-après, on a tracé dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ la courbe $\mathcal{C}_f$ d'une fonction définie sur $\mathbb{R}$. On sait que :

- La droite $\Delta: y = 2x + 4$ asymptote à la courbe $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$
- La droite $y = 0$ est asymptote à la courbe $\mathcal{C}_f$ en $-\infty$



1) Déterminer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - 2x]$

2) Déterminer $f'(-1)$ et $f'(-3)$

3) Déterminer $f'_d(-4)$. Déterminer $\lim_{x \rightarrow (-4)^-} \frac{f(x) + 2}{x + 4}$

4) Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^2 \cdot f(x)$

a) Montrer que $\lim_{x \rightarrow (-1)} \frac{g(x) - g(-1)}{x + 1} = 4$

b) Donner alors une équation cartésienne de la tangente à la courbe $\mathcal{C}_g$ de g au point d'abscisse -1.