

Chapitre VI

Fonctions Dérivées

■ Définitions :

Soit f une fonction définie sur un intervalle I .

On dit que f est dérivable sur un intervalle I .

Si f est dérivable en tout point a de I .

La fonction qui à tout réel a de I , on associe le nombre dérivé de f en a , s'appelle fonction dérivée de f sur I noté f' .

■ Dérivées des fonctions usuelles :

Le tableau suivant donne les dérivées des principales fonctions usuelles.

Fonction	Domaine De définition	Fonction dérivée	Dérivable sur
$x \mapsto k$ (k réel)	$\mathbb{R}$	$x \mapsto 0$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto x$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto 1$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto ax + b$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto a$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto x^n$ ($n \in \mathbb{N}^*$)	$\mathbb{R}$	$x \mapsto nx^{n-1}$	$\mathbb{R}$
$x \mapsto \frac{1}{x}$	$\mathbb{R}^*$	$x \mapsto -\frac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$
$x \mapsto \frac{1}{x^n}$ ($n \in \mathbb{N}^*$)	$\mathbb{R}^*$	$x \mapsto -\frac{n}{x^{n+1}}$	$\mathbb{R}^*$
$x \mapsto \sqrt{x}$	$\mathbb{R}_+$	$x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\mathbb{R}_+^*$

■ Opérations sur les fonctions dérivables :

- f et g sont deux fonctions dérivables sur I , de fonctions dérivées respectives f' et g' sur I .

Fonction	Dérivée
$f + g$	$f' + g'$
$\lambda f (\lambda \in \mathbb{R})$	$\lambda f'$
$f \times g$	$f' \times g + f \times g'$
$\frac{1}{f} (f(x) \neq 0)$	$-\frac{f'}{f^2}$
$\frac{f}{g} (g(x) \neq 0)$	$\frac{f' \times g - g' \times f}{g^2}$
$f^n (n \in \mathbb{Z}^*)$	$n f^{n-1} \times f'$
$\sqrt{f}$	$\frac{f'}{2\sqrt{f}}$
$f(ax + b)$	$a \cdot f'(ax + b)$

- Remarque :
- Toute fonction polynôme est dérivable sur $\mathbb{R}$.
 - Toute fonction rationnelle est dérivable sur son domaine de définition.

■ Les dérivées successifs :

- Si f' est dérivable sur I alors on note f'' la fonction dérivée de f' , on l'appelle la fonction dérivée seconde.
- Remarque : $f', f'', f''', \dots, f^{(n)}$ sont les dérivées successifs d'une fonction dérivable (n) fois sur I .
-
- Toute fonction polynôme est dérivable (n) fois sur $\mathbb{R}$.
 - Toute fonction rationnelle est dérivable (n) fois sur son domaine de définition.

■ Sens de variation d'une fonction :

I désigne un intervalle, f est une fonction définie sur I et dérivable.

- Pour tout $x \in I$; $f'(x) = 0 \Leftrightarrow f$ est constante sur I .
- Pour tout $x \in I$; $f'(x) > 0 \Leftrightarrow f$ est strictement croissante sur I .
- Pour tout $x \in I$; $f'(x) < 0 \Leftrightarrow f$ est strictement décroissante sur I .

■ Extremums :

➤ Définitions :

Soit f définie sur $D, I =]x_0 - h, x_0 + h[$ avec $I \subset D$.

a) f admet un **minimum relatif** en x_0 si et seulement si :

Pour tout $x \in I$; $f(x) \geq f(x_0)$.

b) f admet **un minimum absolu** en x_0 si et seulement si :

Pour tout $x \in D$; $f(x) \geq f(x_0)$

c) f admet **un maximum relatif** en x_0 si et seulement si :

Pour tout $x \in I$; $f(x) \leq f(x_0)$.

d) f admet **un maximum absolu** en x_0 si et seulement si :

Pour tout $x \in D$; $f(x) \leq f(x_0)$.

e) f admet un **extremum** en x_0 si et seulement si f admet un maximum en x_0 ou un minimum en x_0 :

➤ **Extremums et dérivation :**

Théorèmes :

Soit f dérivable sur D et $x_0 \in D$.

1) si f admet un extremum en x_0 alors $f'(x_0) = 0$.

2) si f' s'annule en x_0 en changeant de signe au voisinage de x_0 , alors f admet un extremum relatif en x_0 .

Réflexes

Situation	Réflexes
Dérivée avec $\sqrt{\quad}$ racines	Attention à l'ensemble de dérivabilité
Dérivée avec des valeurs absolues	On se ramène à une fonction définie par intervalles
Déterminer un extremum	On se ramène à un tableau de variation