

## Chapitre VI

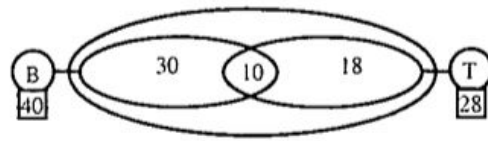
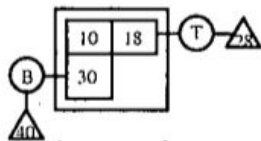
# Dénombrement

### ■ Diagrammes:

On l'utilise lorsqu'on a deux ou trois choix compatibles

Exemple:

Dans un club de 60 joueur de cartes, 40 jouent au bridge et 28 au tarot et 10 jouent à ces deux jeux. On peut utiliser le diagramme de Carrol ou Venn.



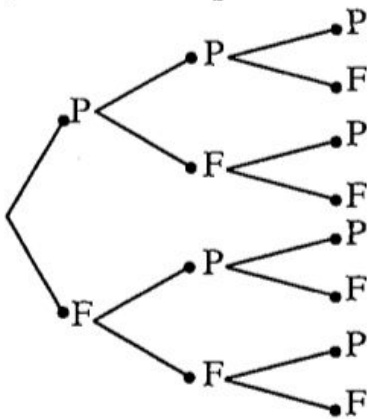
Donc il y a 2 adhérents jouent autre chose.

### ■ L'arbre de choix

On l'utilise lorsqu'on a des choix successifs.

Exemple :

On jette successivement trois pièces de monnaies bien équilibrées, on utilise l'arbre : à la première branche 2 possibilités pile ou face. Puis deux possibilités pour le second lancer etc....



Donc il y a 8 cas possible ou bien  $2 \times 2 \times 2 = 8$

### ■ Cardinal d'un ensemble fini :

- Définition : le cardinal d'un ensemble fini E est le nombre d'élément de cet ensemble . On note : card E.

- Propriétés : Soient E et F deux ensembles finis.

$$\text{Card} (E \cup F) = \text{card} E + \text{card} F - \text{card} (E \cap F) .$$

$$\text{Card} (E \times F) = \text{card} E \times \text{card} F$$

### ■ Arrangements:

➤ Arrangements sans répétition :

- Définition:

Soit E un ensemble fini de cardinal n et p un entier tel que :  $0 \leq p \leq n$  .

On appelle arrangement de  $p$  éléments de  $E$ , une  $p$ -liste de  $E$   
Ou un  $p$ -uplet de  $E$ .

Exemple :  $E = \{1, 2, 3, 4\}$  ;  $(1, 2, 3)$  est triplet de  $E$ .

- Le nombre d'arrangement sans répétition de  $p$  éléments pris parmi  $n$  éléments est :  $A_n^p = n(n-1)\dots(n-p+1)$

- permutations :

une permutation de  $E$  est un arrangement sans répétition de  $n$  éléments pris parmi  $n$  éléments.

Le nombre de permutations est :  $n(n-1)(n-2)\dots \times 3 \times 2 \times 1 = n!$

\* Convention :  $0! = 1$  et  $1! = 1$ .

\* On a également :  $A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$

➤ Arrangement avec répétition :

- $n^p = \underbrace{n \times n \times \dots \times n}_{p \text{ fois}}$  : c'est le nombre de façons de disposer  $p$  l'élément pris parmi  $n$ , avec des répétitions possibles.

• Théorème : Le nombre d'applications d'un ensemble à  $p$  éléments dans un ensemble à  $n$  éléments avec  $0 \leq p \leq n$  et  $p$  et  $n$  deux entiers naturels est  $n^p$ .

## ■ Combinaison :

- Définition :

Soit  $E$  un ensemble de cardinal  $n$  et  $p$  un entier tel que :  $0 \leq p \leq n$ .

Un sous ensemble (non ordonné) de  $p$  éléments de  $E$  (distincts) s'appelle une combinaison de  $p$  élément de  $E$ .

Exemple :  $E = \{1, 2, 3, 4\}$ .

$\{1, 2\}$  est une combinaison de 2 éléments de  $E$ .

- Le nombre de combinaison de  $p$  éléments pris parmi  $n$  est :

$$C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!} = \frac{A_n^p}{p!}$$

- Propriétés des  $C_n^p$  :

\* Pour tout entiers naturels  $n$  et  $p$  tel que  $0 \leq p \leq n$  ; on a :

$$C_n^n = 1; C_n^1 = C_n^{n-1} = n; C_n^p = C_n^{n-p}; C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^p = C_n^p.$$

## ■ Binôme de Newton :

- Pour tout  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$  et pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

On a :  $(a + b)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k \cdot a^k \cdot b^{n-k}$ .

- Nombre de parties d'un ensemble de  $n$  éléments est  $2^n$ .

■ **Point Méthode :**

Situation 1 :

On dispose de  $n$  objet qu'il faut placer dans  $n$  cases, un par case, il s'agit de permutations :

- situation :  $n$  objets,  $n$  places et sans répétition.
- La formule :  $n !$
- Les mots clés : permuter, déplacer, ordonner  $n$  objets.

Situation 2 :

Une urne contient  $n$  objets : On peut prendre un certain nombre  $p$  d'objets de 3 manières :

a) Simultanément cela signifie sans ordre, sans répétition, alors il s'agit des combinaisons .

- Situation :  $n$  objets,  $p$  places et sans ordre.
  - La formule :  $C_n^p$ .
  - Les mots clés : comité, groupe, parties d'un ensemble.
- b) Successivement et sans remise : cela signifie avec ordre et sans répétition, alors il s'agit des arrangements sans répétition.
- Situation :  $n$  objets,  $p$  places et ordre.
  - La formule :  $A_n^p$ .
  - les mots clés : bureau, groupe ordonnés, liste de  $p$  objets distincts.

c) successivement et avec remise, cela signifie avec ordre et répétition, il s'agit des arrangements avec répétitions.

Dans ce cas seulement  $p$  peut être supérieur à

- Situation :  $n$  objets,  $p$  places, ordre et répétition.
- Formule :  $n^p$
- Les mots clés :  $p$ -liste