

Exercice 1 :

Etudier la dérivabilité de f sur son domaine de définition et déterminer sa fonction dérivée f'

$$f(x) = 3x^2 - 7x + 2 ; f(x) = -\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 3 ; f(x) = x^4(x+1)^3 ; f(x) = \frac{3x-2}{3-x} ; f(x) = \frac{x^2-2x+1}{2x-4}$$

Exercice 2 :

Soit la fonction f définie par : $f(x) = (x^2 - 1)^3 + (x^2 + 1)^3$

1. Déterminer la fonction dérivée f'
2. Etudier suivant les valeurs de x le signe de $f'(x)$
3. Déterminer l'ensemble des points où la tangente à la courbe représentative de f est parallèle à l'axe des abscisses

Exercice 3 :

Soit la fonction f définie par : $f(x) = \left(\frac{1+x}{1+2x}\right)^3$

1. Déterminer le domaine de définition de f
2. Déterminer la fonction dérivée f'
3. Déterminer une équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse $a = 1$

Exercice 4 :

Une fonction f vérifie les propriétés suivantes :

- a. f est définie sur $\mathbb{R}$
- b. $f'(x) < 0$ pour tout x appartenant à $] -\infty, -3[\cup]1, +\infty[$
- c. $f'(x) > 0$ pour tout x appartenant à $] -3, 1[$
- d. $f'(-3) = f'(1) = 0$, $f(-3) = -1$ et $f(1) = 2$
- e. L'axe des abscisses est une asymptote à la courbe de f au voisinage de $(+\infty)$ et de $(-\infty)$

Donner son tableau de variations

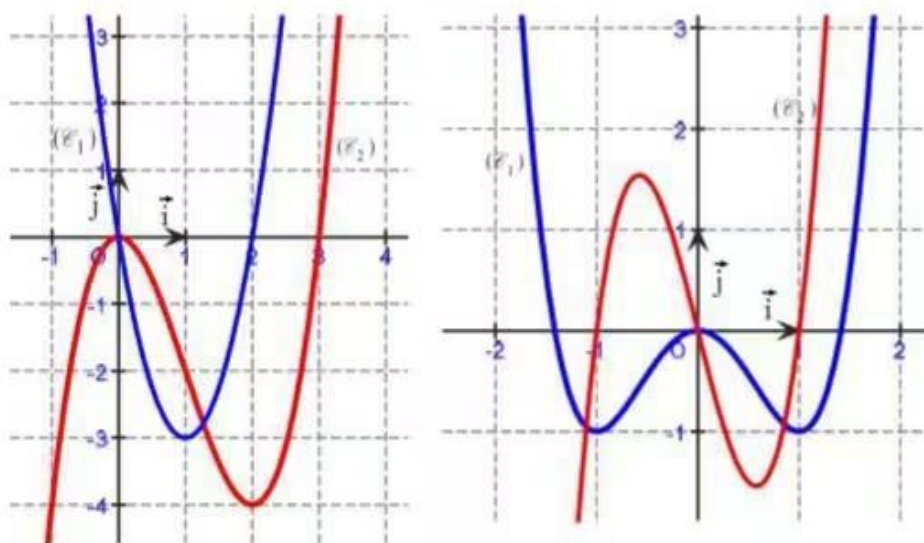
Exercice 5 :

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

ζ_1 et ζ_2 sont les courbes représentatives, d'une fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ et de sa fonction dérivée f' .

Par une lecture graphique :

1. Déterminer, parmi les courbes ζ_1 et ζ_2 celle qui représente la fonction f' .
2. Dresser le tableau de variation de f .



 **Exercice 6 :** Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{-x^2+x+5}{x-3}$

1. a) Déterminer le domaine de définition de f
b) Déterminer $f'(x)$
2. a) Dresser le tableau de variation de f
b) Déterminer les extrema locaux de f
3. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet exactement deux racines

 **Exercice 7 :**

Soit la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 2}$

1. Déterminer le domaine de définition de f
2. Déterminer le domaine de dérivabilité de f et calculer $f'(x)$
3. Dresser le tableau de variation de f

 **Exercice 8 ☺**

On considère les fonctions $h(x) = \frac{2x-1}{x-1}$ et $g_m(x) = (m-1)x^2 + (m-3)x - 2m + 5$

1. Etudier les variations de h
2. a. Etudier, suivant les valeurs de m , les variations de g_m
b. Soit ζ_m la courbe de g_m dans un plan rapporté à un repère
Déterminer m sachant que la tangente à ζ_m en $I(1, g_m(1))$ est parallèle à la droite $D: y = x$
3. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$f(x) = \begin{cases} \frac{2x-1}{x-1} & \text{si } x < 0 \\ g_2(x) & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$
 - a. Etudier la dérivabilité de f en 0
 - b. Etudier les variations de f et préciser ses extremums

 **Exercice 9 :**

Soit $m \in \mathbb{R}$ et f_m la fonction définie par $f_m(x) = \frac{x^2 + (m-2)x + 5 - m}{x-2}$

1. Calculer $f'_m(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$
2. Déterminer l'ensemble des réels m pour lesquels f_m admet deux extremums locaux
3. Déterminer m pour que f_m admette un extremum local en -1

 **Exercice 10 ☺**

I. Soit α et β deux réels et f la fonction définie par $f(x) = \frac{\alpha x + \beta}{x^2 - 4x + 5}$

1. Déterminer α et β sachant que f admet un extremum en 3 égal à $-\frac{1}{2}$
2. On prend $\alpha = -1$ et $\beta = 2$
 - a. Dresser le tableau de variation de f
 - b. Soit ζ la courbe représentative de f dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$
Ecrire une équation de la tangente Δ à ζ au point d'abscisse 2
 - c. Etudier la position de ζ et Δ

II. On considère g la fonction définie par
$$g(x) = \begin{cases} \frac{-x+2}{x^2-4x+5} & \text{si } x \leq 4 \\ \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{9}{10} & \text{si } x > 4 \end{cases}$$

1. Etudier la dérivabilité de g en 4
2. Préciser le domaine de dérivabilité de g et déterminer la fonction g'
3. Etudier les variations de g et préciser ses extremums

Fonction dérivée 3^{ème} Sc Expérimentales

Exercice 1

Déterminer dans chaque cas la fonction dérivée de la fonction f indiquée tout en précisant le domaine de dérivabilité de f .

$$f(x) = -3x^4 + 2x^3 - 5 ; f(x) = \frac{3x-1}{2x+1} ; f(x) = \frac{-x^2+3x-1}{x+1} ; f(x) = \frac{-2x+1}{x^2+1}$$

$$f(x) = -3\sqrt{-2x+3} ; f(x) = \frac{-3}{x^2-4} ; f(x) = \frac{4}{(-x^2+1)^3} ; f(x) = \sqrt{x^2+x+1}$$

$$f(x) = \sqrt{-2x^2+3x-1} ; f(x) = (-3x^2+2x)^4 ; f(x) = \frac{2x-1}{\sqrt{x+1}} ; f(x) = \sqrt{3x+1}$$

$$f(x) = 2(x^3+2x)^3 ; f(x) = (x^2-x)\sqrt{-x^2+9} ; f(x) = (x^2+x)^3(-x^2+1)^4$$

Exercice 2

Soit f la fonction définie par $f(x) = (x-1)\sqrt{2x+1}$

- 1) Déterminer le domaine de définition de f .
- 2) a) Etudier la dérivabilité de f à droite en $-\frac{1}{2}$ et interpréter graphiquement le résultat obtenu.
 b) Montrer que f est dérivable sur $]-\frac{1}{2}, +\infty[$ et calculer $f'(x)$ pour tout $x \in]-\frac{1}{2}, +\infty[$.
 c) Calculer alors $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x-1)\sqrt{2x+1}-9}{x-4}$
- 3) a) Dresser le tableau de variation de f .
 b) En déduire que f admet un minimum absolu que l'on précisera.
 c) Montrer alors que pour tout $x \in [-\frac{1}{2}, 1[$: $\sqrt{2x+1} \leq \frac{1}{1-x}$

Exercice 3

1) Soit f une fonction dérivable et strictement positive sur $\mathbb{R}$ telle que la tangente à C_f au point d'abscisse 0 est $\Delta: y = x + 4$. Soit g la fonction définie par $g = \sqrt{f}$ alors la tangente à C_g au point d'abscisse 0 a pour équation :

a) $y = x + 2$

b) $y = \frac{1}{2}x + 4$

c) $y = \frac{1}{4}x + 2$

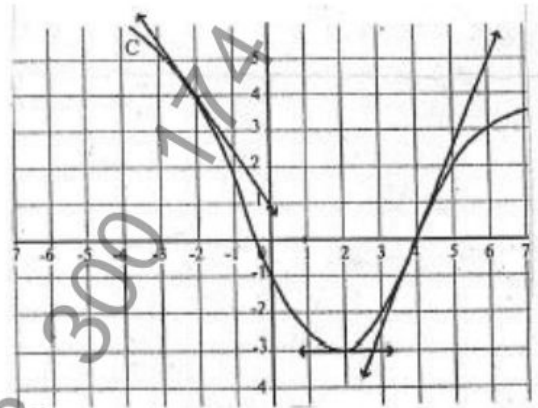
2) Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f'(1) = 1$ et soit g la fonction définie par : $g(x) = f(2x-1)$ alors : a) g n'est pas dérivable en 1 b) $g'(1) = 2$ c) $g'(1) = 1$

Exercice 4

Le graphique ci-contre représente une fonction f définie

sur $\mathbb{R}$ et dérivable en -2 , 2 et 4 .

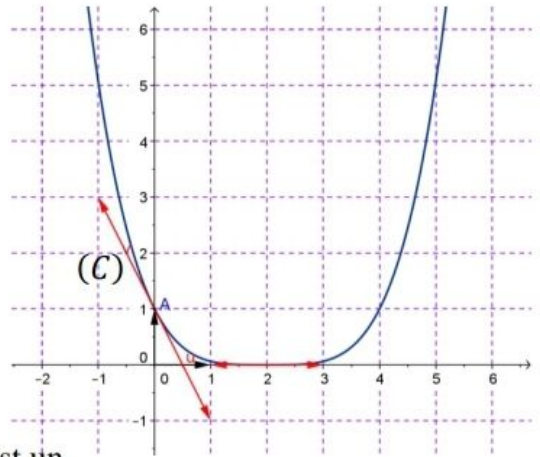
- 1) Déterminer graphiquement (-2) , $f(2)$ et $f(4)$.
- 2) Déterminer graphiquement $'(-2)$, $f'(2)$ et $f'(4)$.
- 3) Déterminer $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + 2x}{f(x) - 4}$
- 4) En utilisant des approximations affines, donner une valeur approché des réels suivant :
 $f(-1,99)$ et $f(4,001)$.



Exercice 5

On donne ci-contre la courbe représentative (C) d'une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ ainsi que les tangentes à (C) aux points d'abscisses 0 et 2 .

- 1) a) Par lecture graphique, calculer $f(0)$, $f(2)$, $f'(0)$ et $f'(2)$.
b) Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - x}{f(x) - 1}$
c) En utilisant une approximation affine, donner une valeur approché du réel $f(0,0001)$.
- 2) On admet que : $\forall x \in \mathbb{R} ; f(x) = (ax + 1)^n$ où a est un Réel et $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$.
a) Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
b) En utilisant ce qui précède, calculer a et n .



Exercice 6

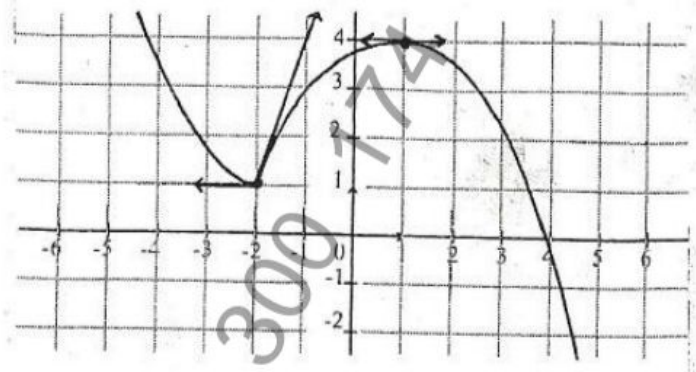
Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{3x}{2x-1}$ On désigne par C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

- 1) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$, et que pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$; $f'(x) = \frac{-3}{(2x-1)^2}$
- 2) Soit la droite Δ : $y = -3x$.
a) Montrer qu'il existe deux tangentes T_1 et T_2 à C_f parallèles à la droite Δ .
b) Donner une équation cartésienne de chacune des tangentes T_1 et T_2
- 3) Existe-t-il des tangentes à C_f passant par le point $A(2, 0)$?

Exercice 7

Le graphique ci-dessous représente une fonction f définie sur $\mathbb{R}$.

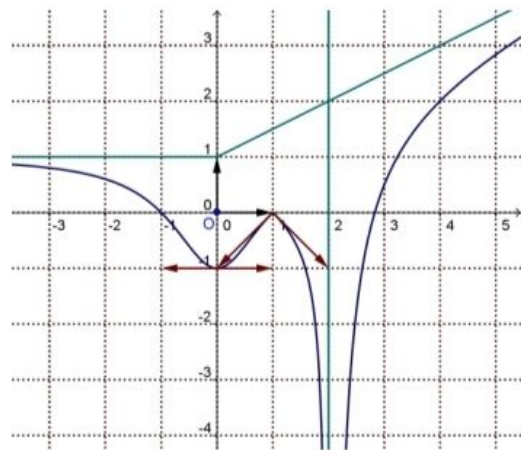
- 1) La fonction f est-elle dérivable en -2 ?
- 2) Déterminer graphiquement $f'_g(-2)$; $f'_d(-2)$ et $f'(1)$
- 3) Dresser le tableau de variation de f .



Exercice 8

Dans la figure ci-contre on a représenté graphiquement la courbe (C) d'une fonction f dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$. La droite $\Delta: y = \frac{1}{2}x + 1$ est une asymptote à (C) au voisinage de $+\infty$ et la droite $\Delta': y = 1$ est une asymptote à (C) au voisinage de $-\infty$.

- 1) Justifier la dérivabilité de f en 0 et donner $f'(0)$.
- 2) a) Justifier la dérivabilité de f à droite en 1 et donner $f'_d(1)$.
b) Justifier la dérivabilité de f à gauche en 1 et donner $f'_g(1)$.
c) La fonction f est-elle dérivable en 1 ? Pourquoi ?



- 3) Donner les asymptotes à la courbe (C)
- 4) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(f(x) - \frac{1}{2}x \right)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) + x)$

Exercice 9

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par
$$\begin{cases} f(x) = \sqrt{1-x} + 1 & \text{si } x \leq 1 \\ f(x) = mx^2 + 2x - 2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

où m est un paramètre réel.

- 1) Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$
- 2) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ (On distinguera trois cas : $m > 0$, $m < 0$ et $m = 0$).
- 3) Montrer que f est continue sur chacun des intervalles : $]-\infty, 1[$ et $]1, +\infty[$.
- 4) Pour quelle valeur de m ; f est continue en 1 ?

- 5) Dans la suite de l'exercice on prend $m = 1$.
- Etudier la dérivabilité de f à droite en 1.
 - Etudier la dérivabilité de f à gauche en 1.
 - la fonction f est-elle dérivable en 1 ?
- 6)
 - Justifier la dérivabilité de f en tout réel $x \in]-\infty, 1[$ et calculer $f'(x)$.
 - Justifier la dérivabilité de f en tout réel $x \in]1, +\infty[$ et calculer $f'(x)$.
- 7) Donner une équation cartésienne de la tangente à (C) au point d'abscisse 0 .
- 8) Soit $a \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ et A le point de (C) d'abscisse a . Déterminer le point A pour que la tangente T à (C) en A soit parallèle à la droite $\Delta: y = -\frac{x}{2} + 1$.

Exercice 10

I/ Soit la fonction f définie par : $f(x) = \frac{x^2+3x}{x-1}$ On désigne par C_f la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

- Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ et que $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ on a $f'(x) = \frac{x^2-2x-3}{(x-1)^2}$
- Déterminer les points de C_f où la tangente est parallèle à la droite $(O, \vec{i})$.
 - Déterminer les points de C_f où la tangente est parallèle à la droite $\Delta: y = -3x + 1$

II/ Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$\begin{cases} g(x) = f(x) & \text{si } x \leq 0 \\ g(x) = \sqrt{x^2 + 2x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

- Montrer que g est continue en 0.
- Etudier la dérivabilité de g en 0 et interpréter le résultat graphiquement.
- Justifier que g est dérivable sur chacun des intervalles $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$ et calculer $g'(x)$ sur chacun de ces intervalles.
 - Déterminer le signe de $g'(x)$ sur chacun des intervalles $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$.
 - Dresser le tableau de variation de g .
- Déterminer les extrémums de g et préciser leurs natures.

Exercice 11

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$\begin{cases} f(x) = \frac{x^3+2x+1}{2x-1} & \text{si } x > 1 \\ f(x) = x^2 + 3 & \text{si } x \leq 1 \end{cases}$$

On désigne par (C_f) sa courbe représentative

- Montrer que f est continue sur chacun des intervalles $]-\infty, 1[$ et $]1, +\infty[$
 - Etudier la continuité de f en 1.

- c) Donner alors le domaine de continuité de f .
- 2) Montrer que f est dérivable sur chacun des intervalles $]-\infty, 1[$ et $]1, +\infty[$.
- 3) a) Etudier la dérivabilité de f à gauche en 1.
b) Etudier la dérivabilité de f à droite en 1.
c) La fonction f est-elle dérivable en 1 ?
- 4) En déduire le domaine de dérivabilité de f .
- 5) Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$

Exercice 12

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$\begin{cases} f(x) = \frac{1+x^2}{1-x} & \text{si } x < 0 \\ f(x) = 1 + x\sqrt{x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

On désigne par C_f sa courbe.

- 1) a) Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.
b) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$.
c) Montrer que la droite $y = -x - 1$ est une asymptote à C_f au voisinage de $-\infty$.
- 2) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.
- 3) a) Etudier la dérivabilité de f à gauche et à droite en 0. Conclure.
b) Interpréter les résultats obtenus graphiquement.
c) Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$.
- 4) Ecrire les équations cartésiennes des demi tangentes T_1 et T_2 à C_f au point d'abscisse 0.

Exercice 13

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par
$$\begin{cases} f(x) = x^2 + bx - 1 & \text{si } x < 0 \\ f(x) = 2\sqrt{x} - x + b + 1 & \text{si } x > 0 \\ f(0) = -1 \end{cases} \quad b \in \mathbb{R}$$

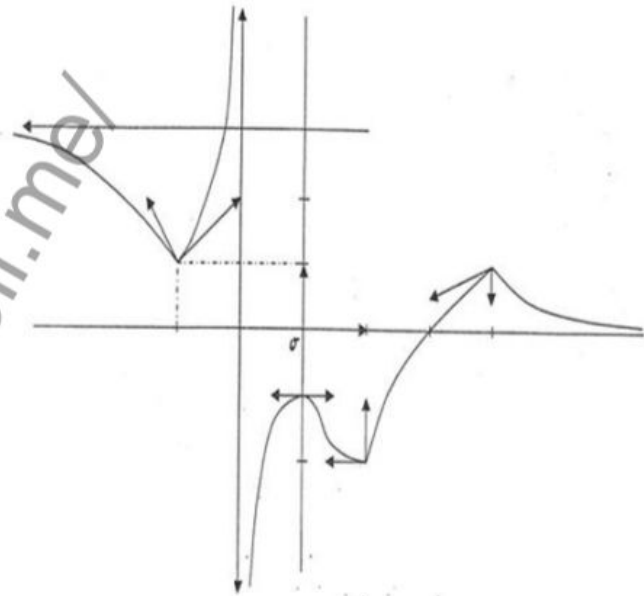
- 1) Déterminer les limites suivantes : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x)$
- 2) a) Montrer que f est continue sur chacun des intervalles $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$
b) Déterminer b pour que f soit continue sur $\mathbb{R}$.
- 3) Dans la suite de l'exercice on prend $b = -2$.
a) Montrer que f est dérivable à gauche en 0 puis donner une équation cartésienne de la demi-tangente à C_f au point d'abscisse 0.
b) Etudier la dérivabilité de f à droite en 0 et interpréter géométriquement le résultat obtenu.

- 4) a) Montrer que f est dérivable au point $a = 4$.
 b) Ecrire une équation de la tangente T à C_f au point d'abscisse 4.
 c) Déterminer le réel m pour que T soit perpendiculaire à la droite $\Delta_m: mx - 2y + 1 = 0$
- 5) Soit $a \in]-\infty, 0[$.
 a) Calculer $f'(a)$ puis écrire une équation de la tangente T' à C_f au point d'abscisse a .
 b) Montrer qu'il existe une seule tangente à C_f passant par le point $A(0, -5)$
 c) Donner une équation de cette tangente.

Exercice 14

La courbe ci-contre représentée est la courbe d'une fonction . Par lecture graphique répondre aux questions suivantes.

- 1) $D_f = \dots$ 8) $f'_g(-2)$
 2) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ 9) $f'_d(-2)$
 3) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ 10) $f'(0)$
 4) $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x)$ 11) $f'_g(1)$
 5) $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$ 12) $f'_g(3)$
 6) $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x)+2}{x-1}$ 13) $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{f(x)-1}{x-3}$
 7) Le domaine de continuité de f est
 8) Le domaine de dérivabilité de f est



Exercice 15

La courbe C_f ci-dessous représentée est la courbe d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$

- * La droite Δ d'équation $y = x - 4$ est une asymptote à C_f au voisinage de $+\infty$.
- * La droite d'équation $x = 0$ est une asymptote à C_f .
- * La droite T est la tangente à C_f au point A .
- * La courbe C_f admet deux demi tangentes au point B et une tangente horizontale au point C .

- 1) Déterminer $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x)$
 2) a) Déterminer $f'(1)$; $f'(2)$ et $f'_d(-1)$
 b) Donner une approximation affine de $f(0,998)$
 3) Déterminer $\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{f(x)-1}{x+1}$

a) Montrer que $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(x)-g(1)}{x-1} = -\frac{1}{2}$

au point d'abscisse 1.

