Chapitre VII

Divisibilité

■ **Principe de raisonnement par récurrence.**

Soit P_n une propriété dépendant d'un entier naturel n supérieur où égal à n_0

Si les deux conditions suivantes sont vérifiées:

- P_{n_0} est vraie
- si P_n est vraie alors P_{n+1} est vraie, alors P_n est vraie pour tout n supérieur où égal à n_0

■ **Méthodes sur la divisibilité sur IN**:

- La Division euclidienne :

  Soient a, b deux entiers naturels avec $b \neq 0$ il existe un seul couple (q, r) tel que

$$\boxed{a} = \boxed{b} \times \boxed{q} + \boxed{r} \qquad \text{avec } 0 \leq r < b$$

  ↑ la dividende ; ↑ Diviseur ; ↑ quotient ; ↑ reste

- Si $r = 0$ alors $a = b.q$ on dit que a est un multiple de b où b est un diviseur de a.

Si un entier $c \neq 0$ et c divise b et a alors c divise tout entier de la forme $ma + nb \quad (m, n \in IN)$

- **Comment montrer que b divise a ?**

1ère Méthode

Factoriser en produit de facteurs consécutifs pour prouver une divisibilité

Exemple

Montrer que 2 divise $n^2 + n$

$n^2 + n = n(n + 1)$. comme n, n + 1 sont consécutifs

alors 2 divise n + 1 ou 2 divise n $\Rightarrow$ 2 divise $n^2 + n$.

2ème Méthode

La démonstration par récurrence

Exemple

Montrer par récurrence que :* $n^3 - n$ est divisible par 6 .

*vérifions pour n = 0:

$n^3 - n = 0$ divisible par 6 donc la propriété est vraie pour n = 0

*Supposons pour tout $n \geq 0$ on a $n^3 - n$ est divisible par 6

Montrons que $(n+1)^3-(n+1)$ est divisible par 6.
$(n+1)^3-(n+1)=n^3+3n^2+2n=n^3-n+3(n^2+n)$
comme n^3-n est divisible par 6 et $3\times n(n+1)$ est divisible par $2\times 3=6$ d'où $(n+1)^3-(n+1)$ est divisible par 6.
D'après le principe de récurrence : $\forall n\in\mathbb{N}, n^3-n$ est divisible par 6.

3ème Méthode

Si d divise c et $c=ma+nb$ il faut retrouver m et n alors d divise a et divise b

Exemple

$a=3n-5$ et $b=2n-7$.

Montrer que tout diviseur commun à a et b est un diviseur de 11 ?

k divise a et b alors k divise 2a et 3b d'où k divise $2a-3b$

et $2a-3b=6n-10-6n+21=11$ en déduit que k divise 11 d'où tout diviseur de a et b est un diviseur de 11.

- **PGCD et PPCM** :

- Le plus grand commun diviseur de a et b qu'on note **PGCD(a,b)** ou $a\wedge b$
- Le plus petit commun multiple de a et b qu'on note **PPCM(a,b)** ou $a\vee b$

Exemple 1 : Déterminer le PGCD et le PPCM de 360 et 500

On décompose en facteur premier et on procède comme suit

360	2	500	2
180	2	250	2
90	2	125	5
45	3	25	5
15	3	5	5
5	5	1	
1			

$360=2^3\times 3^2\times 5$ et $500=2^2\times 5^3$

$\text{PGCD}(360,500)=2^2\times 5=20$

$\text{PPCM}(360,500)=2^3\times 3^2\times 5^3=9000$

Exemple 2 : Déterminer PGCD et PPCM de $x(x-1)^2$ et x^3-x^2

On factorise $x^3-x^2=x^2(x-1)$ et $x(x-1)^2$.

$\text{PGCD}\left(x(x-1)^2, x^3-x^2\right)=x(x-1)$

$\text{PPCM}\left(x(x-1)^2, x^3-x^2\right)=x^2(x-1)^2$

Méthode d'algorithme d'Euclide : calculer le PGCD (a, b) ?

On divise a par b on obtient $a=bq_1+r_1$ avec $0\le r_1<b$

puis on divise b par r_1 on obtient $b=q_2r_1+r_2$ avec $r_2<r_1$

puis on divise r_1 par r_2 on obtient $r_1=r_2q_3+r_3$

ainsi de suite jusqu'a tomber sur un reste nul

on conclut alors PGCD (a, b) est le dernier reste non nul.

Exemple : PGCD (120, 35) ?

$120 = 3 \times \boxed{35} + 25$ $\qquad 25 = \boxed{10} \times 2 + 5$

$35 = \boxed{25} \times 1 + 10$ $\qquad 10 = \boxed{5} \times 2 + 0$

donc PGCD (120, 35) est 5 car c'est le dernier reste non nul.

- **Propriétés** :
- Si $a \wedge b = 1$ alors $a \vee b = ab$
- Si a / b alors $a \wedge b = a$ et $a \vee b = b$
- PGCD (ka, kb) = k PGCD(a, b)

- **les diviseurs d'un entier naturel :**

- **Définition** :

b est un diviseur de a qu'on note b/a signifie que a = b.q avec $q \in IN$

On note : Div (a) l'ensemble des diviseurs de a

Exemple :

- Div(2) = {1, 2}
- Div(5) = {1, 5}
- **Lemme d'Euclide** : $a, b \in IN^*$

Si a = b q + r alors PGCD (a, b) = PGCD (b, r)

- **Systèmes de numérotation** :
- **Définition** : $A \in IN$, l'écriture de A dans le système de numérotation de base b sous la forme $A = \overline{q_n\, q_{n-1} \ldots . q_0}$. Signifie que

$$A = q_0 + bq_1 + b^2 q_2 + \ldots + b^n q_n$$

Où $A = \sum_{i=0}^{n} b^i q_i$ avec $(0 \le q_i \le b\text{-}1$ Si $i \ne n)$ et $1 \le q_n \le b\text{-}1$

Exemples :

1) Si b = 5 (Système à base 5)

$A = \overline{412} = 2 + 1 \times 5^1 + 4 \times 5^2 = 107$

2) Si b = 2 (Système à base 2) ou binaire

$A = \overline{1011} = 1 + 1 \times 2^1 + 0 \times 2^2 + 1 \times 2^3 = 11$

Exemple :

A = 2031 écrire A dans la base 5

$A = 2000 + 30 + 1 = 2 \times 1000 + 30 + 1$ or $1000 = 10^3 = 5^3 \times 2^3$

$= 16 \times 5^3 + 6 \times 5 + 1 = (15+1) \times 5^3 + (5+1)5 + 1$

$= 3.5^4 + 5^3 + 5^2 + 5 + 1 = \overline{31111}$

Remarque :

* Si b = 2 (système à base 2) on dit dans le système binaire.
* Si b = 10 (système à base 10) on dit dans le système décimal.

Réflexes

Situations	Réflexes
Montrer qu'un polynôme en n est divisible par b	On essaye dans l'ordre : 1) Ecrire comme le produit de nombre consécutifs 2) Démonstration par récurrence
Montrer qu'une somme de puissances d'exposants dépendant de n est divisible par b	La démonstration par récurrence
Montrer qu'un diviseur commun à deux nombres a et b divise un nombre c	On essaye d'écrire c sous la forme $na + mb$ avec $n, m \in \mathbb{N}$
Pour déterminer un PGCD de deux entiers	* On essaye d'appliquer la formule : 1) PGCD (ka, kb) = k PGCD (a, b) puis en utilise l'algorithme d'Euclide. 2) On décompose en facteurs premiers
Pour déterminer un PPCM de deux entiers	1) On calcule PGCD puis en applique PPCM (a, b) = $a \vee b = \frac{ab}{a \wedge b}$