



EXERCICE N° 1: 9 POINTS

BAREME

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4x - 1$

On désigne par $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f

- | | |
|--|------|
| 1-Déterminer $f(0)$; $f(1)$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ | 1 |
| 2-a-Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $f'(x)$ | 0,75 |
| b-Dresser le tableau de variations de la fonction f | 0,75 |
| c-En déduire que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans l'intervalle $[0;1]$ | 0,75 |
| 3-a- Montrer que le point $A(1;1)$ est un centre de symétrie de la courbe $\mathcal{C}_f$ | 1 |
| b-Montrer qu'une équation de la tangente T à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point $A(1;1)$ est : $T : y = x$ | 0,75 |
| 4-a-Vérifier que : $f(x) - x = (x - 1)^3$ | 0,5 |
| b-En déduire la position de la courbe $\mathcal{C}_f$ par rapport a la tangente T | 0,5 |
| c-Compléter sur la feuille annexe la courbe $\mathcal{C}_f$ | 0,5 |
| 5- On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = f(x - 1) = x - 1 ^3 - 3 x - 1 ^2 + 4 x - 1 - 1$ | |
| On désigne par $\mathcal{C}_g$ la courbe représentative de g | |
| a-Montrer que la droite $\Delta : x = 1$ est un axe de symétrie de la courbe $\mathcal{C}_g$ | 0,5 |
| b-Montrer que le point $B(1;-1)$ est un point anguleux pour la courbe $\mathcal{C}_g$ | 1 |
| c-Tracer sur la feuille annexe la courbe $\mathcal{C}_g$ a partir de $\mathcal{C}_f$ | 1 |

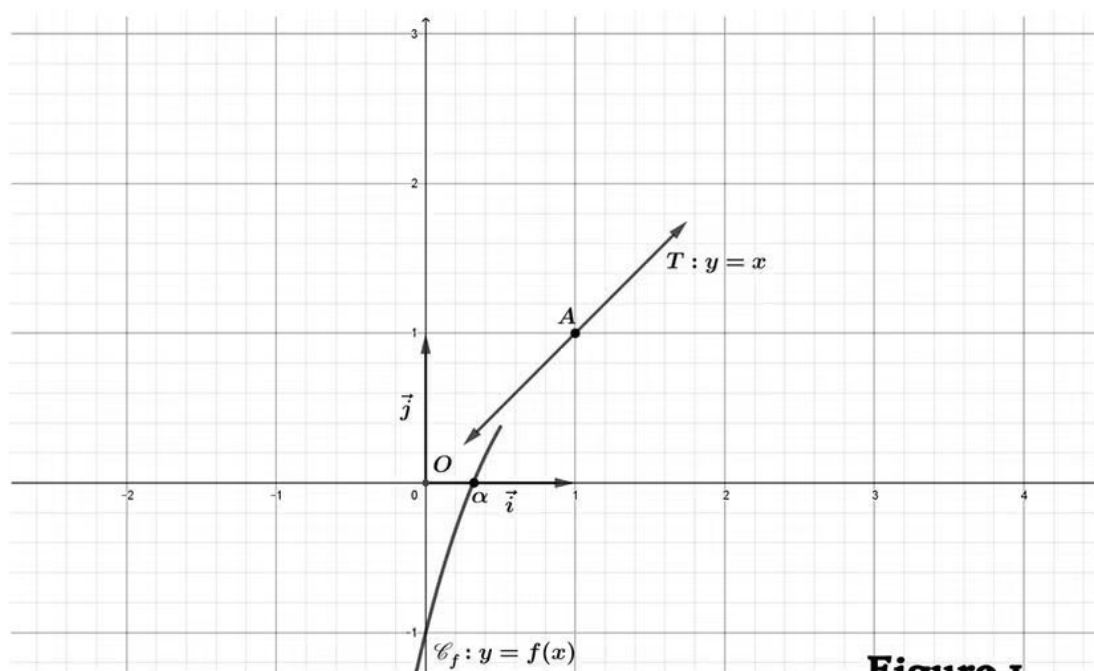


Figure 1

EXERCICE 2: 8.5 POINTS**BAREME**

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ par $f(x) = \frac{x^3 + 3x + 2}{x^2}$ et on note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

Partie A : Étude d'une fonction g

Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = x^3 - 3x - 4$

1~Dresser le tableau de variation de g .

1,5

2~a~Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$.

0,5

b~En déduire le signe de g sur $\mathbb{R}$

0,5

Partie B : Étude de la fonction f

1~a~Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

1

b~Justifier que la courbe $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote verticale dont On précisera l'équation.

0,5

2~a~Montrer que, pour tout x de $\mathbb{R} \setminus \{0\}$: $f'(x) = \frac{g(x)}{x^3}$.

1

b~En déduire le signe de $f'(x)$, puis dresser son tableau de variation de f .

1

3~a~Vérifier que, pour tout x de $\mathbb{R} \setminus \{0\}$: $f(x) = x + \frac{3x + 2}{x^2}$.

0,25

b~En déduire que la courbe $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote oblique $\mathcal{D}$ en $+\infty$ et en $-\infty$.

0,5

c~Étudier la position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à $\mathcal{D}$ en précisant le point d'intersection de $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{D}$.

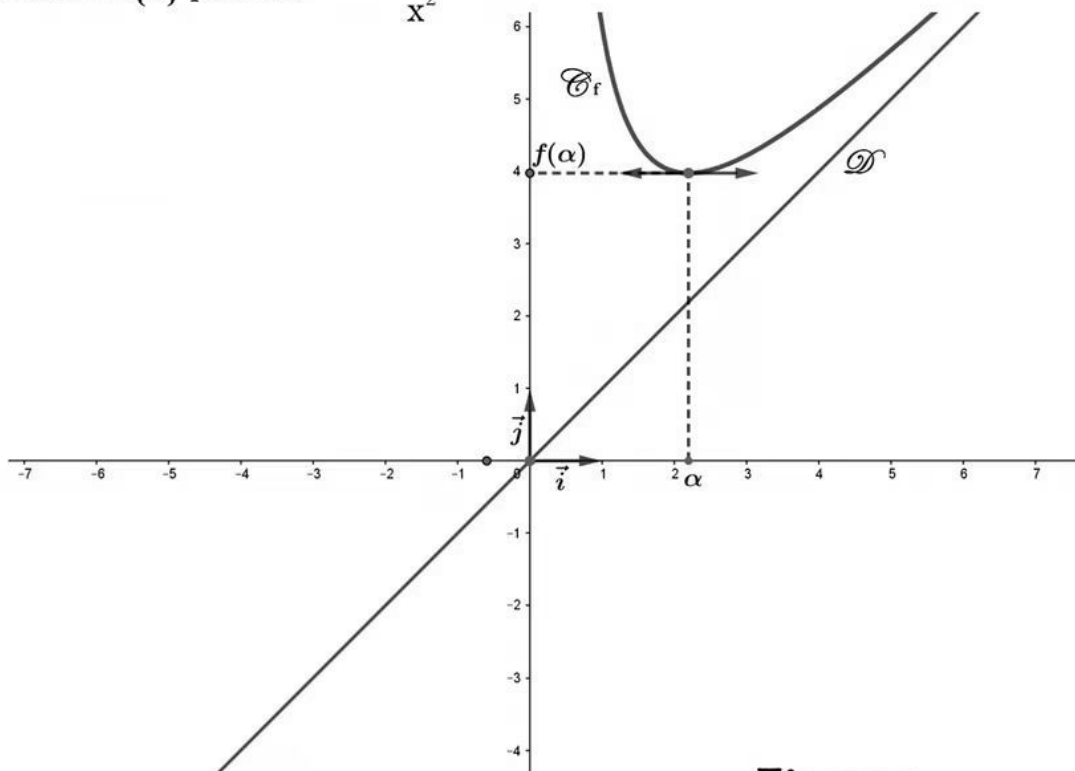
1

4~a~Compléter soigneusement sur la feuille annexe la courbe $\mathcal{C}_f$

b~En déduire a partir de la courbe $\mathcal{C}_f$ la représentation graphique $\mathcal{C}_h$ de la fonction h

0,75

définie sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ par $h(x) = \frac{|x^3 + 3x + 2|}{x^2}$

**Figure 1**

EXERCICE 3: 9 POINTS

BAREME

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ par $f(x) = \frac{x^3 + 2x^2}{x^2 - 1}$ et on note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

Partie A. Étude d'une fonction g

Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = x^3 - 3x - 4$

1-Dresser le tableau de variation de g .

1,5

2-a-Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$.

0,5

b-En déduire le signe de g sur $\mathbb{R}$

0,5

Partie B. Étude de la fonction f

1-a-Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

1

b-Justifier que la courbe $\mathcal{C}_f$ admet deux asymptotes verticales dont On précisera les équations

0,5

2-a-Montrer que, pour tout x de $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$: $f'(x) = \frac{xg(x)}{(x^2 - 1)^2}$.

0,75

b-En déduire le signe de $f'(x)$, puis dresser son tableau de variation de f .

1

3-a-Montrer que, pour tout x de $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$: $f(x) = x + 2 + \frac{x+2}{x^2 - 1}$.

0,25

b-En déduire que la droite $\mathcal{D} : y = x + 2$ est une asymptote oblique à la courbe $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$ et en $-\infty$.

0,5

c-Étudier la position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à $\mathcal{D}$ en précisant le point d'intersection de $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{D}$.

1

4-a-Compléter soigneusement sur la figure 1 de la feuille annexe la courbe $\mathcal{C}_f$

0,75

b-En déduire à partir de la courbe $\mathcal{C}_f$ la représentation graphique $\mathcal{C}_h$ de la fonction h

0,75

définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ par $h(x) = \frac{x^3 + 2x^2}{|x^2 - 1|}$

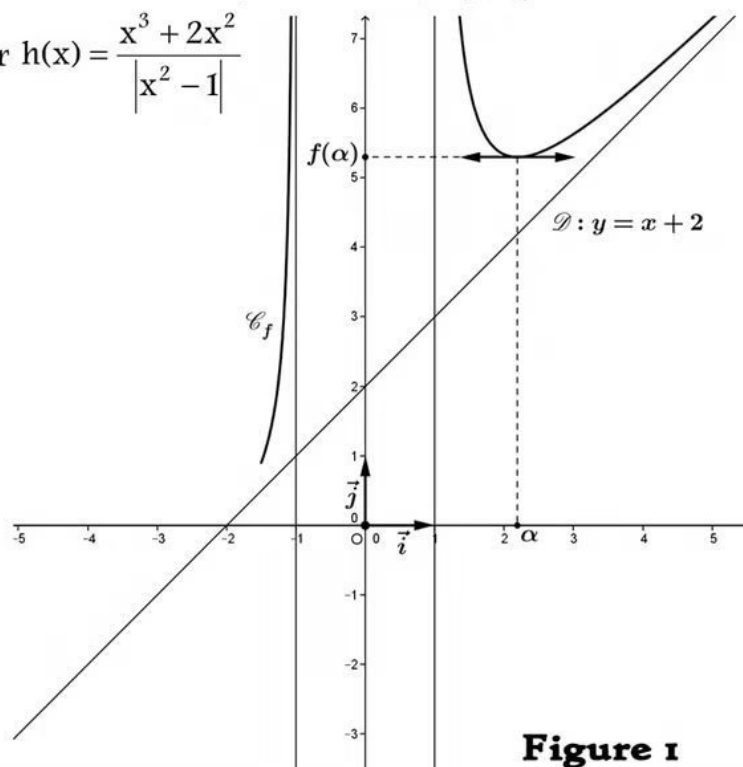


Figure 1

EXERCICE 4: 6.5 POINTS**BAREME**

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x - 1 + \frac{2x}{x^2 + 1}$

On désigne par $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1- a- Vérifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ puis montrer que $f'(x) = \frac{x^4 + 3}{(x^2 + 1)^2}$

0,75

b- Dresser le tableau de variations de f

0,5

2- Montrer que la droite $\Delta : y = x - 1$ est une asymptote à $\mathcal{C}_f$

0,5

3- Montrer que le point $A(0, -1)$ est centre de symétrie pour la courbe $\mathcal{C}_f$

0,75

4- a- Vérifier que l'équation de la tangente T_A à $\mathcal{C}_f$ au point A est : $y = 3x - 1$

0,25

b- Préciser la position de la courbe $\mathcal{C}_f$ par rapport à T_A

0,5

5- Montrer que pour tout réel x : $x - 2 \leq f(x) \leq x$

0,5

6- Montrer que les droites $\mathcal{D} : y = x - 2$ et $\mathcal{D}' : y = x$ sont tangentes à $\mathcal{C}_f$ aux points $B(-1, -3)$ et $C(1, 1)$ respectivement.

0,5

7- Tracer sur la figure 1 de la feuille annexe les deux droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$, puis compléter la courbe $\mathcal{C}_f$

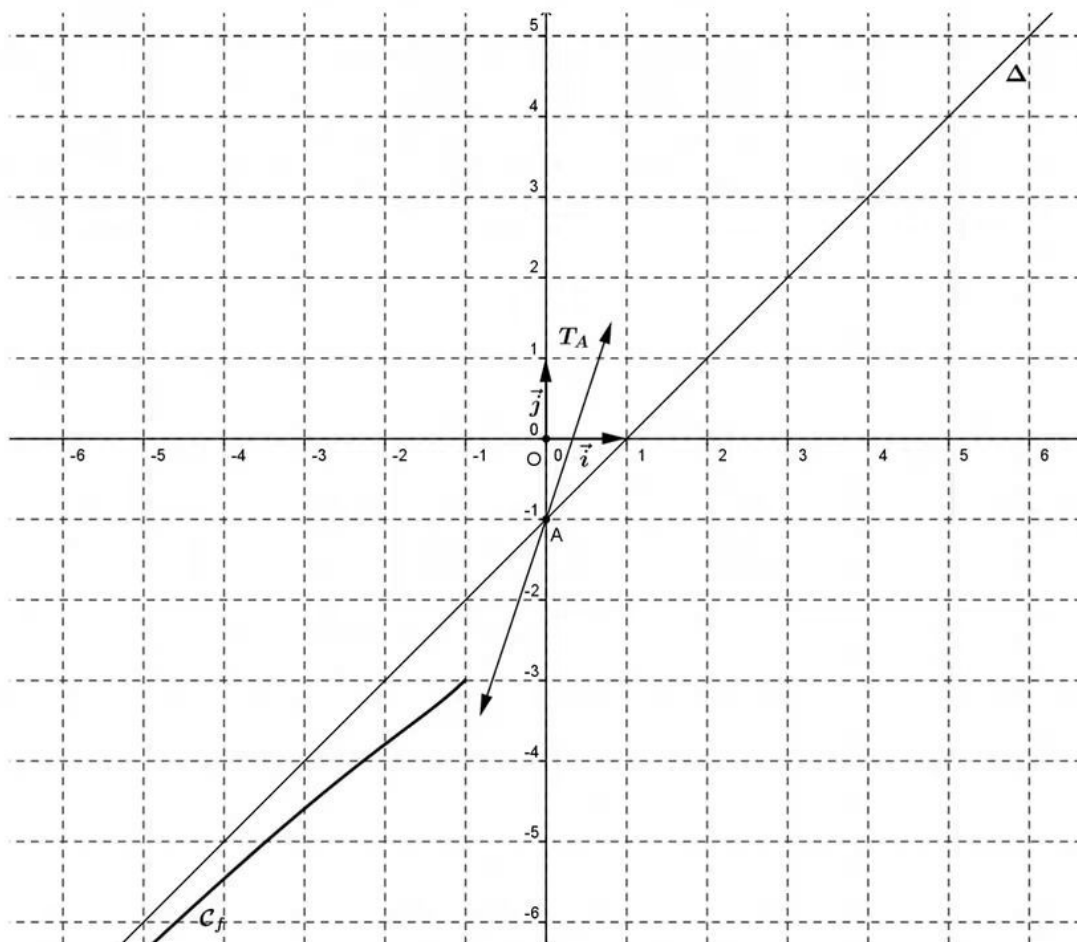
1

8- a- Tracer à partir de $\mathcal{C}_f$ dans le même repère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = f(|x|)$

0,5

b- Vérifier graphiquement puis justifier par le calcul que g n'est pas dérivable en 0

0,75

**Figure 1**

EXERCICE 5: 10 POINTS

BAREME

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x^2 + x - 1}{x - 1} & \text{si } x \in]0; +\infty[\setminus \{1\} \\ f(x) = \sqrt{x^2 + 1} & \text{si } x \in]-\infty, 0] \end{cases}$$

On désigne par $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1- a- Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

0,5

b- Déterminer $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$; $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$. Interpréter graphiquement le résultat

0,75

2- a- Montrer que f est continue en 0.

0,5

b- Montrer que f est dérivable en 0 et que $f'(0) = 0$.

1

3- a- Montrer que la droite $\mathcal{D}: y = x - 2$ est asymptote à la courbe Γ au voisinage de $+\infty$

0,75

b- Montrer que la droite $\mathcal{D}': y = -x$ est asymptote à la courbe Γ au voisinage de $-\infty$

0,75

4- Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ on a :

$$\begin{cases} f'(x) = \frac{x^2 - 2x}{(x - 1)^2} & \text{si } x \in]0; +\infty[\setminus \{1\} \\ f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} & \text{si } x \in]-\infty, 0] \end{cases}$$

1

5- Dresser le tableau de variations de f

1

6- la figure 1 ci-dessous représente une partie de la courbe Γ sur $]-\infty; 0]$

Compléter sur la feuille annexe la courbe Γ

1,5

7- Soit la fonction g définie par $g(x) = f(|x|)$

a- Vérifier que l'ensemble de définition de g est $\mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$

0,5

b- Vérifier que la fonction g est paire

0,25

c- Tracer à partir de Γ dans le même repère la courbe $\mathcal{C}_g$ de la fonction g

1

d- Vérifier graphiquement que g est dérivable en 0

0,5

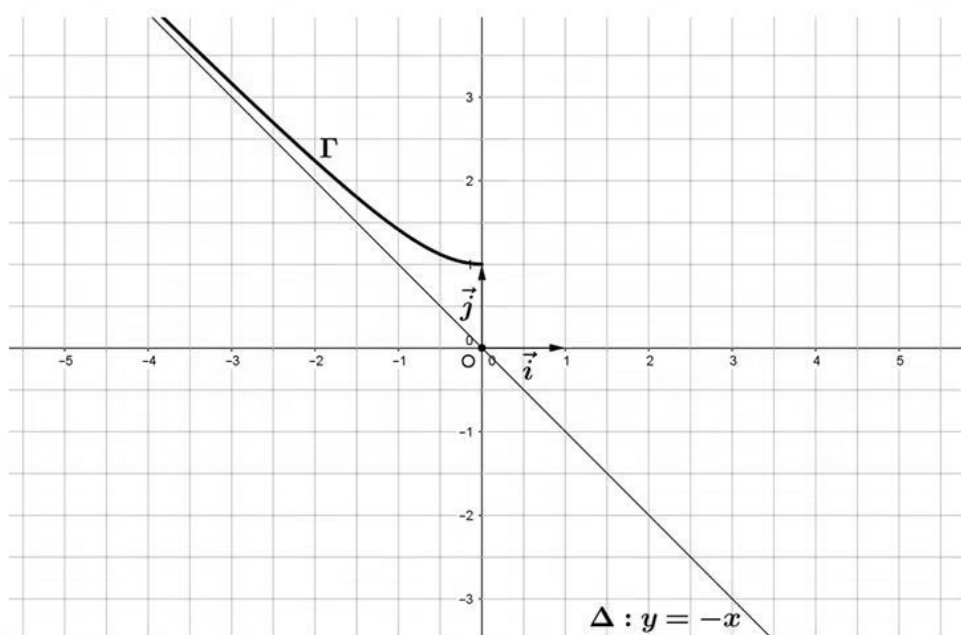


Figure 1

EXERCICE 1: 7 POINTS

BAREME

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{x^2 - x - 2}{x^2 - x + 1}$ et on note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1-a-Résoudre l'équation $f(x) = 0$

0,25

b-Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$. Interpréter graphiquement le résultat

0,75

2-a-Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $f'(x) = \frac{3(2x-1)}{(x^2-x+1)^2}$.

0,75

b-Dresser le tableau de variation de f .

0,5

3-a-Soit T la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 2

0,5

Montrer que T a pour équation $T : y = x - 2$

b-Etudier la position de la courbe $\mathcal{C}_f$ par rapport à sa tangente T .

0,5

4-Montrer que la droite $\Delta : x = \frac{1}{2}$ est un axe de symétrie pour $\mathcal{C}_f$

0,5

5- Compléter soigneusement sur la feuille annexe la courbe $\mathcal{C}_f$

0,75

6-Soit g la fonction définie sur $]-\infty; -1] \cup [2; +\infty[$ par $g(x) = \sqrt{f(x)}$

a-Etudier la dérivabilité de g à droite en 2 et à gauche en -1

b-Interpréter graphiquement les résultats.

0,5

c-Dresser le tableau de variation de g .

0,5

d-Construire dans le même repère la courbe $\mathcal{C}_g$

0,75

0,75

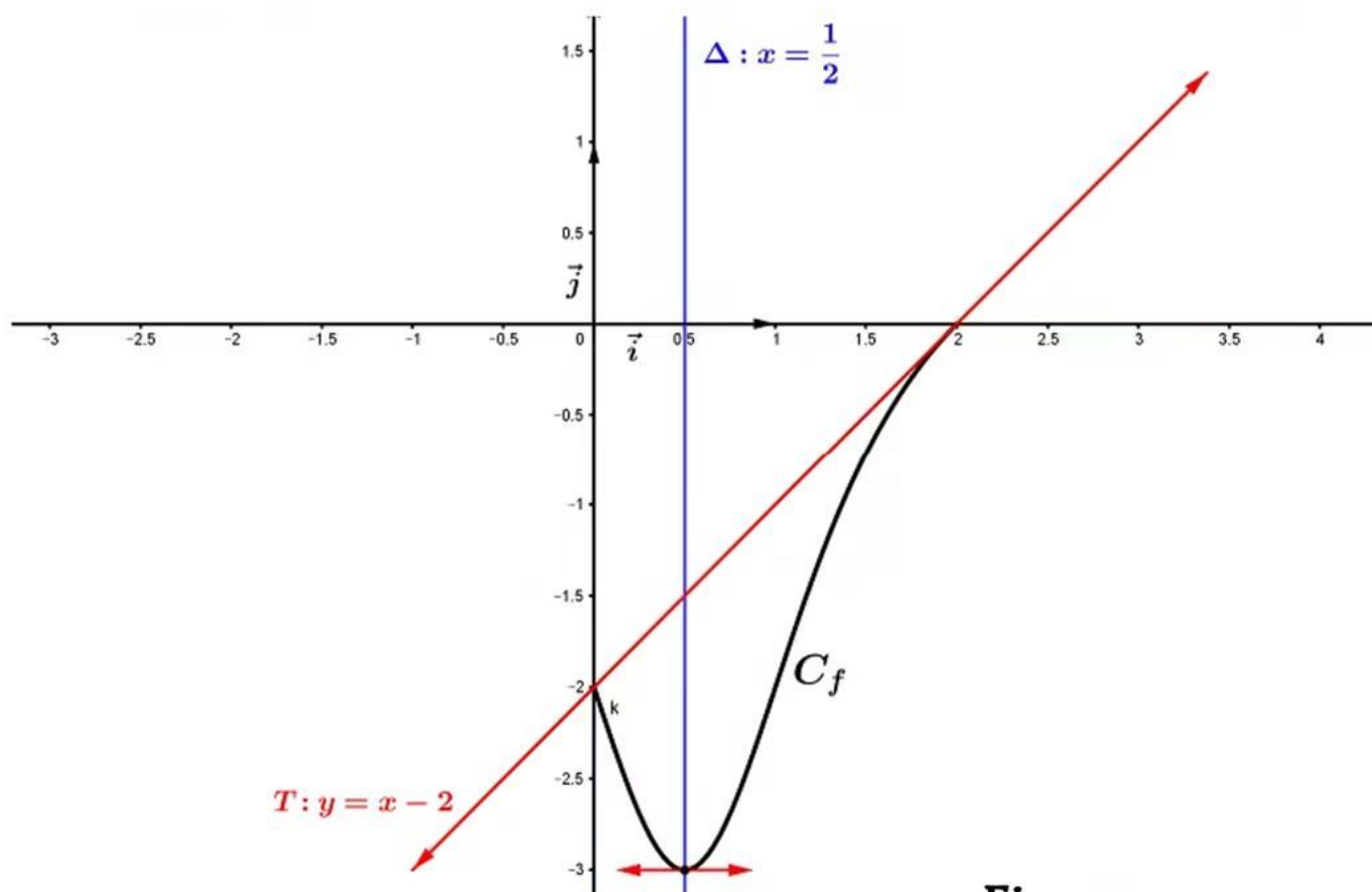


Figure 1