

Exercice 1 :

- 1 Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n , $3^{2n} - 1$ est divisible par 8.
- 2
 - a Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Développer l'expression $(n-1)^2 + 3(n-1) + 2$.
 - b Déterminer tous les entiers naturels non nuls vérifiant $(n-1)$ divise $n^2 + n + 19$.
- 3 Déterminer tous les couples (a, b) d'entiers naturels vérifiant : $7(a-5) = 4(b+3)$.
- 4 Déterminer l'ensemble de tous les couples (a, b) d'entiers naturels solutions du système $(S) : \begin{cases} a^2b + ab^2 = 277830 \\ a + b = 105 \\ a \vee b = 126 \end{cases}$.

Exercice 2 :**Partie I :**

- 1 Décomposer 377 en produit de facteurs premiers.
- 2 Soient a et b deux entiers naturels non nuls. On pose $x = 2a + b$ et $y = 5a + 2b$.
 - a Calculer $y - 2x$ et $5x - 2y$.
 - b Montrer que : $a \wedge b = (2a + b) \wedge (5a + 2b)$.
- 3 Résoudre dans $\mathbb{N}^2$ le système suivant : $\begin{cases} (2a + b)(5a + 2b) = 1508 \\ ab = 2(a \vee b) \end{cases}$.

Partie II : x et y étant des entiers naturels, on considère l'équation $(E) : 8x - 11y = 55$.

- 1
 - a Vérifier que $(11, 3)$ est une solution de (E) .
 - b Montrer que : $8x - 11y = 55 \iff 8(x - 11) = 11(y - 3)$.
- 2 Déterminer l'ensemble des solutions de (E) .

Exercice 3 :

I- Répondre par vrai ou faux en justifiant la réponse.

- 1 Si le PPCM de deux entiers naturels est un multiple de 21 alors au moins l'un d'eux est multiple de 21.
- 2 Pour tout entier naturel n , $2n + 1$ et $2n + 3$ sont premiers entre eux.
- 3 Il existe deux entiers naturels a et b tel que $5a + 20b = 49$.

II- Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $4^n + 15n - 1$ est divisible par 9.

III- Soit n un entier naturel tel que $n \geq 2$. Soient $A = n^2 - n + 4$ et $B = n + 1$.

- 1
 - a Montrer que : $A \wedge B = B \wedge 6$.

- (b) Dédurre que : $(A \wedge B = 3)$ si et seulement si $(B$ est impair et B est divisible par 3).
- (c) Donner alors les valeurs de n pour que $A \wedge B = 3$.

2 Pour quelles valeurs de n , A est divisible par B ?

IV- Déterminer les couples (a, b) d'entiers naturels vérifiant
$$\begin{cases} (a \vee b) - 3(a \wedge b) = 108 \\ 10 < a \wedge b < 15 \end{cases}$$
.

Exercice 4 :

- 1 Montrer par récurrence que pour tout entier naturel k , $5^{4k} - 1$ est divisible par 13.
- 2 En déduire le reste de la division euclidienne de chacun de 5^{4k+1} , 5^{4k+2} et 5^{4k+3} par 13, pour $k \in \mathbb{N}$.
- 3 Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $5^{4k} + 5^{4k+1} + 5^{4k+2} + 5^{4k+3}$ est divisible par 13.
- 4 On pose $S = 1 + 5 + 5^2 + 5^3 + \dots + 5^{400}$.
Déterminer le reste de la division euclidienne de S par 13.

Exercice 5 :

- 1
 - (a) Montrer que pour tout entier naturel n , $3^{n+6} - 3^n$ est divisible par 7.
 - (b) Dédurre que pour tout entier naturel n , 3^{n+6} et 3^n ont le même reste dans la division euclidienne par 7.
 - (c) Déterminer alors le reste de la division euclidienne de 3^{2012} par 7.
- 2 Soit n un entier naturel. On considère les entiers naturels $x = 5n + 31$ et $y = 3n + 12$.
 - (a) Montrer que tout diviseur commun de x et y est un diviseur de 33.
 - (b) En déduire $\text{PGCD}(555555586, 333333345)$.
- 3 Déterminer les couples d'entiers naturels (a, b) solutions du système
$$\begin{cases} a + b = 176 \\ a \wedge b = 16 \end{cases}$$
.

Exercice 6 :

- 1
 - (a) Montrer par récurrence que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $5^{2k} - 1$ est divisible par 3.
 - (b) En déduire le reste de la division euclidienne de 5^{2k+1} par 3 pour tout $k \in \mathbb{N}$.
- 2 Soit x un entier naturel.
 - (a) Quels sont les restes possibles de la division euclidienne de x par 3.
 - (b) En déduire, pour chaque cas, le reste de la division euclidienne de x^2 par 3.
- 3 On se propose de déterminer, s'ils existent, des entiers naturels a tels que $a^2 + 9$ soit une puissance de 5.
 - (a) Montrer que l'égalité $a^2 + 9 = 5^n$, où $a \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}$ et $n \geq 2$ est impossible si n est impair.
 - (b) On pose $n = 2p$, $p \in \mathbb{N}^*$.
Dédurre, d'une factorisation de $5^n - a^2$, qu'il existe un seul entier naturel a tel que $a^2 + 9$ soit une puissance de 5.