

Chapitre VIII

Les nombres premiers

■ Définition :

- Un nombre est dit premier s'il admet 2 diviseurs 1 et lui même.

*Remarque : 1 n'est pas un nombre premier

- ### ■ Théorème :
- n un entier naturel supérieur ou égal à 2, si n n'est divisible par aucun entier P tel que $2 \leq P \leq \sqrt{n}$ alors n est premier .

- Exemple : 971 est il premier ?

On essaie de diviser 971 par 2,3,5,7,11,13,17,19,23,29,31 on s'arrête à 31 car le nombre qui lui est immédiatement supérieur est 37, et que $37^2 = 1369 > 971$ et l'on se rend compte qu'aucun de ces nombres ne convient On en déduit que 971 est premier.

- ### ■ Définition :
- un entier est dit **composé** s'il admet un diviseur premier

$$1 < P \leq \sqrt{n}$$

- ### ■ Théorème :
- il existe une infinité de nombres premiers.

• **Théorème Fondamental de l'arithmétique** :

Tout entier naturel non nul et différent de 1 se décompose d'une façon unique sous forme d'un produit de n facteurs premières

$$N = P_1^{\alpha_1} \times P_2^{\alpha_2} \times \dots \times P_n^{\alpha_n} .$$

avec $P_1, P_2, \dots, P_n$ des nombres premiers tels que $P_1 < P_2 < P_n$ et

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{N}$$

Exemple : $144 = 2^4 \times 3^2$.

Petit théorème de Fermat :

p est un nombre premier, a entier tel que $a > 2$ et non divisible par p.

$$\Rightarrow a^{p-1} - 1 \text{ est divisible par } p .$$

Conséquence : p premier, a un entier supérieur ou égal à 2 alors

$a^p - a$ est divisible par p.

- ### ■ Propriété :
- c un nombre premier ; a, b deux entiers naturels

c divise ab et c ne divise pas a $\Rightarrow$ c divise b

Réflexes

Situations	Réflexes
Déterminer le nombre de diviseurs d'un entier N ?	On décompose N en facteurs premiers $N = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \dots p_n^{\alpha_n}$. Le nombre de diviseurs de N est : $(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \dots (\alpha_n + 1)$
Déterminer si un entier naturel n est premier ou non	On effectue les divisions euclidiennes de n par les nombres premiers 2, 3, 5, 7, ..., 17. jusqu'à ce qu'on arrive soit à une division exacte soit à l'essai d'un nombre premier dont le carré est supérieur au nombre donné (alors le nombre est premier)