

Exercice 1

On considère la fonction $f : x \mapsto 2\cos^2 x - 1$ et soit $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

- 1) Montrer que pour tout réel x on a : $f(x) = \cos(2x)$
- 2) a) Etudier la périodicité de f
- b) Dresser le tableau des variations de f sur $[0, \pi]$
- c) Tracer $\mathcal{C}$

Exercice 2

Soit la fonction $f : x \mapsto 1 - 2\cos(2x + \pi)$

- 1) Etudier la fonction f et tracer sa courbe représentative $\mathcal{C}$ dans un repère orthonormé.
- 2) Calculer les coordonnées des points d'intersection de $\mathcal{C}$ et de l'axe des abscisses
- 3) Soit un entier relatif k , montrer que le point $I_k\left(\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, 1\right)$ est un centre de symétrie de la courbe $\mathcal{C}$
- 4) a) Résoudre dans $[0, \pi]$ l'équation $f(x) = 0$
- b) Résoudre dans $[0, \pi]$ graphiquement l'inéquation $f(x) \geq 0$

Exercice 3

Soit f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (1 + \cos x) \sin x$ et $\mathcal{C}$ la représentation graphique de la fonction f dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$

- 1) a) Montrer que f est périodique de période 2π
- b) Etudier la parité de f
- c) Expliquer pourquoi on peut restreindre l'étude de f à l'intervalle $[0, \pi]$
- 2) Montrer que la fonction dérivée f' de f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f'(x) = 2\cos^2 x + \cos x - 1$
- 3) a) Factoriser le polynôme $2t^2 + t - 1$
- b) En déduire une factorisation de $f'(x)$
- c) Dresser le tableau de variation de f sur $[0, \pi]$
- 4) Déterminer, sur l'intervalle $[0, \pi]$, les abscisses des points d'intersection de $\mathcal{C}$ avec l'axe des abscisses
- 5) Ecrire l'équation de la tangente T à $\mathcal{C}$ au point O
- 6) Construire $\mathcal{C}$ sur $[-2\pi, 2\pi]$

Exercice 4

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3\cos\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)$ et $\mathcal{C}$ sa représentation graphique dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$

- 1) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $-3 \leq f(x) \leq 3$
- 2) a) Montrer que f est impaire
- b) Montrer que f est périodique de période π
- c) Justifier pourquoi il suffit d'étudier f sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$
- 3) a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ puis dans $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ l'inéquation $\sin\left(2x + \frac{\pi}{2}\right) \geq 0$
- b) Calculer $f'(x)$
- c) Dresser le tableau de variations de f sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$
- 4) Donner l'équation de la tangente T à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0
- 5) Tracer $\mathcal{C}$

Exercice 5

Soit la fonction $f_m : x \mapsto (2m + 1)\cos x + \sin x - m + 1$ où m est un paramètre réel. On note $\mathcal{C}_m$ la courbe représentative de f_m dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

- 1) Montrer que toutes les courbes $\mathcal{C}_m$ passent par des points fixes dont on déterminera les coordonnées
- 2) Déterminer m pour que $\mathcal{C}_m$ admette au point d'abscisse $\frac{\pi}{2}$ une tangente parallèle à l'axe des abscisses

- 3) Dans la suite on prend $m = -\frac{1}{2}$
- Etudier la fonction f
 - Tracer $\mathcal{C}$

Exercice 6

On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sin\left(2x + \frac{2\pi}{3}\right)$

- Vérifier que f est périodique de période π
 - Résoudre dans $[0, \pi]$ l'équation $f(x) = 0$
- Etudier les variations de f sur $[0, \pi]$
 - Tracer $\mathcal{C}$
- Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \cos\left(2x + \frac{2\pi}{3}\right)$
 - Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = f\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$
 - En déduire une construction de $\mathcal{C}'$ la courbe représentative de g

Exercice 7

- Soit $P(X) = 2X^2 - X - 1$
 - Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $P(X) = 0$
 - Etudier le signe de $P(X)$
- On appelle f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sin(2x) - 2\sin x$
 - Justifier qu'il suffit d'étudier f sur $[0, \pi]$
 - Montrer que $f'(x) = 4\cos^2 x - 2\cos x - 2$
 - Etudier les variations de f sur $[0, \pi]$ en utilisant la question 1)
- Tracer une période de la courbe de f dans le plan muni d'un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ d'unité $\frac{\pi}{6}$ cm sur l'axe $(O, \vec{i})$ et 2 cm sur $(O, \vec{j})$

Exercice 8

Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{\cos x}{1 + \sin x}$. On désigne par $\mathcal{C}$ sa courbe dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

- Donner le domaine de définition de f
- Montrer que 2π est une période de f
- Montrer que le point $A\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$ est un centre de symétrie de $\mathcal{C}$
- En déduire qu'on peut réduire l'étude de f à l'intervalle $I = \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$
- Montrer que $f'(x) = -\frac{1}{1 + \sin x}$ pour tout $x \in I$
 - Dresser le tableau de variation de f sur l'intervalle I
- Tracer la partie de $\mathcal{C}$ relative à l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$

Exercice 9

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sin^2 x + \cos x$

- Démontrer que f est périodique de période 2π
- Etudier la parité de f
- Dresser le tableau de variation de f sur $[0, \pi]$
- Tracer la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$

Exercice 1

1) Pour tout réel $x \in \mathbb{R}$ on a : $f(x) = 2\cos^2 x - 1 = (1 - \sin^2 x) + \cos^2 x - 1 = \cos^2 x - \sin^2 x = \cos(2x)$

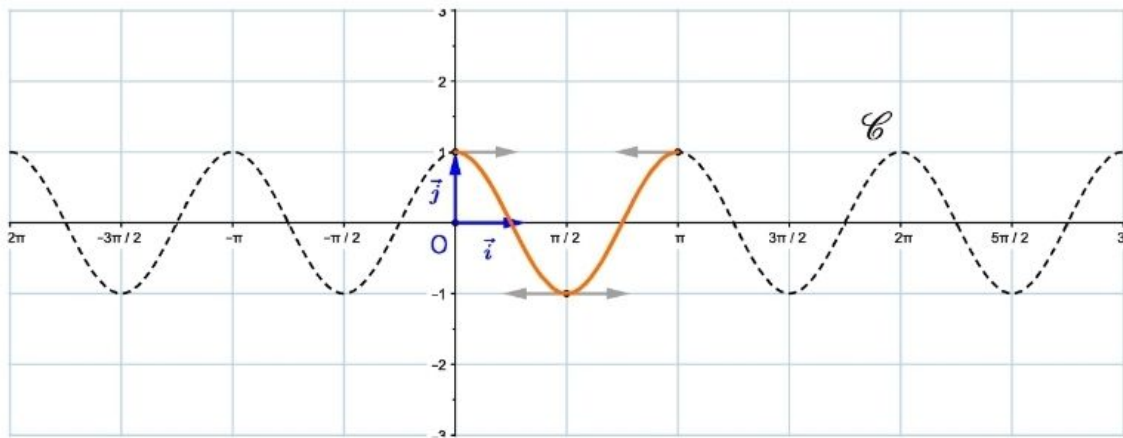
2) a) f est périodique de période $\frac{2\pi}{2} = \pi$ donc il suffit d'étudier f sur un intervalle de longueur π

b) La fonction f est dérivable sur $[0, \pi]$ et on a : $f'(x) = -2\sin(2x)$

$$\sin(2x) \geq 0 \Leftrightarrow 2k\pi \leq 2x \leq \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow k\pi \leq x \leq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π
f'(x)	0	0	0
f	1	-1	1

c)



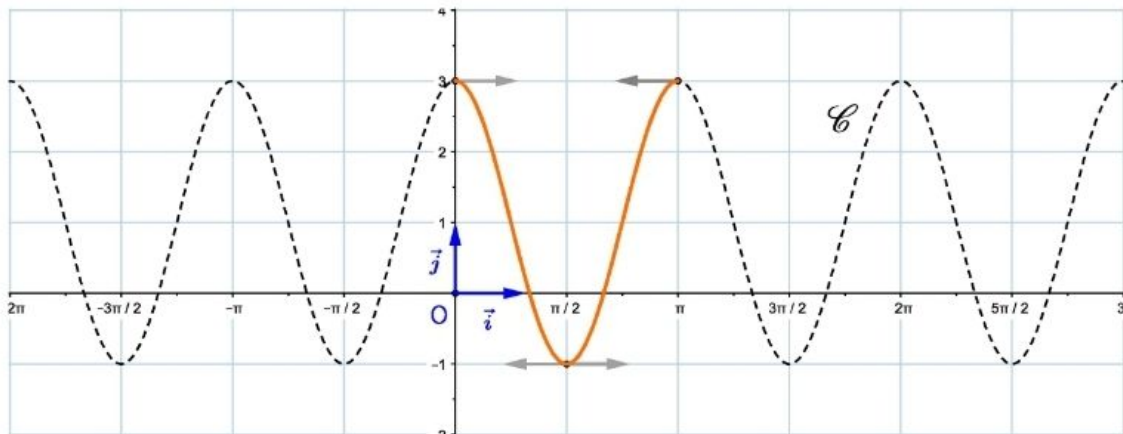
Exercice 2

1) La fonction f est périodique de période π donc il suffit de l'étudier sur l'intervalle $[0, \pi]$

La fonction f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a : $f'(x) = 4\sin(2x + \pi)$

$$\sin(2x + \pi) \geq 0 \Leftrightarrow 2k\pi \leq 2x + \pi \leq \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow k\pi - \frac{\pi}{2} \leq x \leq k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π
f'(x)	0	0	0
f	3	-1	3



$$2) f(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - 2\cos(2x + \pi) = 0 \Leftrightarrow \cos(2x + \pi) = \frac{1}{2} = \cos \frac{\pi}{3}$$

$$\Leftrightarrow 2x + \pi = \frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \text{ ou } 2x + \pi = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow 2x = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \text{ ou } 2x = -\frac{4\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \text{ ou } x = -\frac{2\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

donc $\mathcal{C}$ coupe l'axe des abscisses aux points de coordonnées $A_k\left(-\frac{\pi}{3} + k\pi, 0\right)$ et $B_k\left(-\frac{2\pi}{3} + k\pi, 0\right)$ où $k \in \mathbb{Z}$

3) Si $x \in \text{Df} = \mathbb{R}$ alors $\left(\frac{\pi}{2} + k\pi - x\right) \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} f\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) &= 1 - 2\cos\left(2\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) + \pi\right) = 1 - 2\cos(\pi + 2k\pi - 2x + \pi) \\ &= 1 + 2\cos(-2x + \pi) \\ &= 2 - (1 - 2\cos(-2x + \pi)) \\ &= 2 - f(x) \end{aligned}$$

donc le point $I_k\left(\frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}, 1\right)$ est un centre de symétrie de la courbe $\mathcal{C}$ pour $k \in \mathbb{Z}$

4) a) $f(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - 2\cos(2x + \pi) = 0 \Leftrightarrow \cos(2x + \pi) = \frac{1}{2}$

$$\Leftrightarrow 2x + \pi = \frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \text{ ou } 2x + \pi = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow 2x = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \text{ ou } 2x = -\frac{4\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \text{ ou } x = -\frac{2\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{donc } S_{[0, \pi]} = \left\{\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right\}$$

$$\text{b) } f(x) \geq 0 \quad S_{[0, \pi]} = \left[0, \frac{\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{2\pi}{3}, \pi\right]$$

Exercice 3

1) a) Si $x \in \mathbb{R}$ alors $(x + 2\pi) \in \mathbb{R}$ et $f(x + 2\pi) = (1 + \cos(x + 2\pi))\sin(x + 2\pi) = (1 + \cos x)\sin x = f(x)$ donc f est périodique de période 2π

b) Si $x \in \mathbb{R}$ alors $-x \in \mathbb{R}$ et $f(-x) = (1 + \cos(-x))\sin(-x) = -(1 + \cos x)\sin x = -f(x)$ donc f est impaire

c) f étant périodique il suffit de l'étudier sur un intervalle d'amplitude 2π par exemple $[-\pi, \pi]$, le reste de la courbe s'obtiendra par translations de vecteurs $2k\pi\vec{i}$ avec k entier relatif

f étant impaire, $\mathcal{C}$ est symétrique par rapport à l'origine O il suffit donc d'étudier f sur $[0, \pi]$, la symétrie par rapport à O nous donnera $\mathcal{C}$ sur $[-\pi, \pi]$

2) Les fonctions $x \mapsto \sin x$ et $x \mapsto 1 + \cos x$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$ donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$\begin{aligned} f'(x) &= (1 + \cos x)\cos x - \sin^2 x \\ &= \cos x + \cos^2 x - \sin^2 x \\ &= \cos x + \cos^2 x - (1 - \cos^2 x) \\ &= 2\cos^2 x + \cos x - 1 \end{aligned}$$

$$3) \text{ a) } 2t^2 + t - 1 = 2(t+1)\left(t - \frac{1}{2}\right)$$

$$\text{b) } f'(x) = 2\cos^2 x + \cos x - 1 = 2(\cos x + 1)\left(\cos x - \frac{1}{2}\right)$$

c) Sur $[0, \pi]$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow (\cos x + 1)\left(\cos x - \frac{1}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow \cos x + 1 = 0 \text{ ou } \cos x - \frac{1}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos x = -1 \text{ ou } \cos x = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} \text{ ou } x = \pi$$

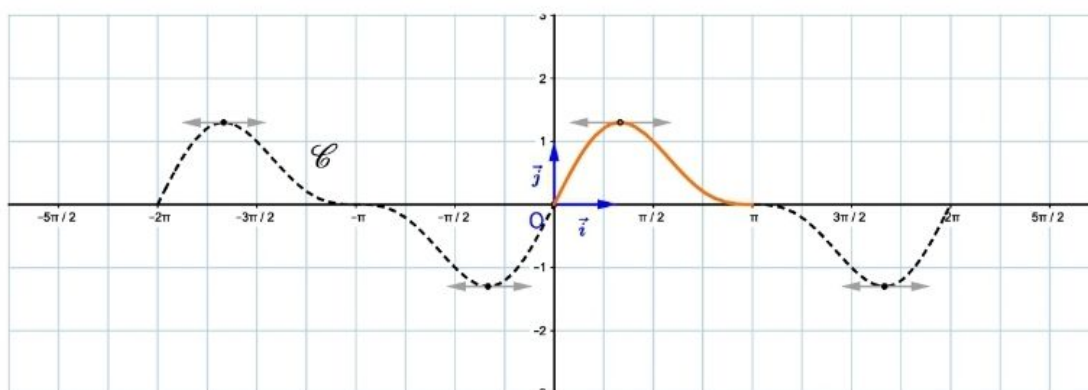
$$\cos x - \frac{1}{2} > 0 \Leftrightarrow \cos x > \frac{1}{2} \Leftrightarrow x \in \left]0, \frac{\pi}{3}\right[$$

x	0	$\frac{\pi}{3}$	π
$\cos x + 1$	+	+	+
$\cos x - \frac{1}{2}$	+	○	-
$f'(x)$	+	○	-
f	0	$\frac{3\sqrt{3}}{4}$	0

4) Sur $[0, \pi]$, $f(x) = 0 \Leftrightarrow \sin x = 0$ ou $\cos x + 1 = 0 \Leftrightarrow \sin x = 0$ ou $\cos x = -1 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = \pi$ donc $\mathcal{C}$ coupe l'axe des abscisses aux points d'abscisses 0 et π

5) $T: y = f'(0)x + f(0) = 2x$

6)



Exercice 4

1) On a pour tout $x \in \mathbb{R}$, $-1 \leq \cos\left(2x + \frac{\pi}{2}\right) \leq 1 \Leftrightarrow -3 \leq 3 \cos\left(2x + \frac{\pi}{2}\right) \leq 3 \Leftrightarrow -3 \leq f(x) \leq 3$

2) a) Si $x \in D_f = \mathbb{R}$ alors $-x \in \mathbb{R}$ et on a :

$$f(-x) = 3 \cos\left(-2x + \frac{\pi}{2}\right) = -3 \sin(-2x) = 3 \sin(2x) = -3 \cos\left(2x + \frac{\pi}{2}\right) = -f(x)$$

donc f est impaire

b) Si $x \in D_f = \mathbb{R}$ alors $(x + \pi) \in \mathbb{R}$ et on a :

$$f(x + \pi) = 3 \cos\left(2(x + \pi) + \frac{\pi}{2}\right) = 3 \cos\left(2x + 2\pi + \frac{\pi}{2}\right) = 3 \cos\left(2x + \frac{\pi}{2}\right) = f(x)$$

donc f est périodique de période π

c) f est périodique de période π donc il suffit de l'étudier sur l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

f est impaire donc $\mathcal{C}$ symétrique par rapport à l'origine il suffit donc d'étudier f sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

3) a) $\sin\left(2x + \frac{\pi}{2}\right) \geq 0 \Leftrightarrow 2k\pi \leq 2x + \frac{\pi}{2} \leq \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow 2k\pi - \frac{\pi}{2} \leq 2x \leq \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

$$\Leftrightarrow k\pi - \frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$S_{\mathbb{R}} = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left[-\frac{\pi}{4} + k\pi, \frac{\pi}{4} + k\pi \right] \text{ et } S_{\left[0, \frac{\pi}{2}\right]} = \left[0, \frac{\pi}{4} \right]$$

b) $f'(x) = -6 \sin\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)$

c)

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$	-	○	+
f	0	-3	0

4) $T: y = f'(0)x + f(0) = -6x$

Exercice 6

1) a) Si $x \in \mathbb{R}$ alors $(x + \pi) \in \mathbb{R}$

$$f(x + \pi) = \sin\left(2(x + \pi) + \frac{2\pi}{3}\right) = \sin\left(2x + 2\pi + \frac{2\pi}{3}\right) = \sin\left(2x + \frac{2\pi}{3}\right) = f(x)$$

donc f est périodique de période π

$$b) f(x) = 0 \Leftrightarrow \sin\left(2x + \frac{2\pi}{3}\right) = 0 \Leftrightarrow 2x + \frac{2\pi}{3} = k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow 2x = -\frac{2\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{3} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

$$S_{[0, \pi]} = \left\{\frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{3}\right\}$$

2) a) La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a $f'(x) = 2\cos\left(2x + \frac{2\pi}{3}\right)$

$$f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow \cos\left(2x + \frac{2\pi}{3}\right) \geq 0 \Leftrightarrow -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq 2x + \frac{2\pi}{3} \leq \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{7\pi}{6} + 2k\pi \leq 2x \leq -\frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

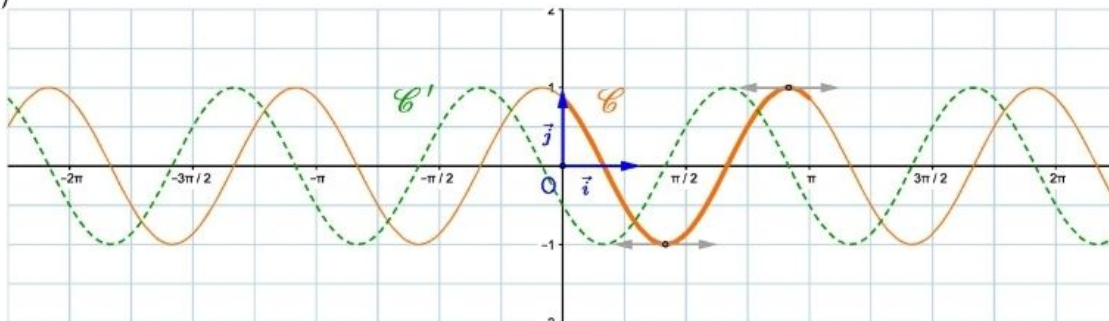
$$\Leftrightarrow -\frac{7\pi}{12} + k\pi \leq x \leq -\frac{\pi}{12} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow \frac{5\pi}{12} + k\pi \leq x \leq \frac{11\pi}{12} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$S_{[0, \pi]} = \left[\frac{5\pi}{12}, \frac{11\pi}{12}\right]$$

x	0	$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{11\pi}{12}$	π		
f'(x)	-	$\bigcirc$	+	$\bigcirc$	-	
f	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\downarrow$	$\uparrow$	$\frac{5}{2}$	$\downarrow$	1

b)



$$3) a) \text{ Pour tout } x \in \mathbb{R} \text{ on a : } f\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(2\left(x + \frac{\pi}{4}\right) + \frac{2\pi}{3}\right) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{2} + \frac{2\pi}{3}\right) = \cos\left(2x + \frac{2\pi}{3}\right) = g(x)$$

b) $\mathcal{C}'$ est l'image de la courbe $\mathcal{C}$ par la translation du vecteur $-\frac{\pi}{4}\vec{i}$

Exercice 7

$$1) a) P(X) = 0 \Leftrightarrow 2X^2 - X - 1 = 0$$

$$\Delta = (-1)^2 - 4 \times (-1) \times 2 = 9$$

$$\text{donc } X_1 = \frac{1-3}{4} = -\frac{1}{2} \text{ et } X_2 = \frac{1+3}{4} = 1 \text{ c'est-à-dire } S_R = \left\{-\frac{1}{2}, 1\right\}$$

b)

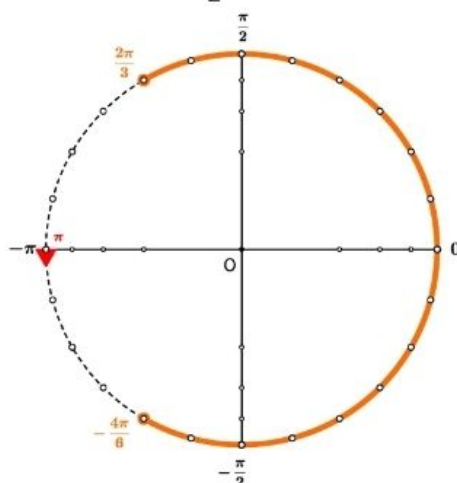
X	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	1	$+\infty$	
P(X)	+	$\bigcirc$	-	$\bigcirc$	+

2) a) $D_f = \mathbb{R}$ → La fonction f est périodique de période 2π donc il suffit d'étudier f sur $[-\pi, \pi]$ → si $x \in \mathbb{R}$ alors $(-x) \in \mathbb{R}$ et $f(-x) = \sin(-2x) - 2\sin(-x) = -\sin(2x) + 2\sin x = -f(x)$ donc f estimpaire → La courbe de f est symétrique par rapport à l'origine et par suite il suffit d'étudier f sur $[0, \pi]$

b) f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a :

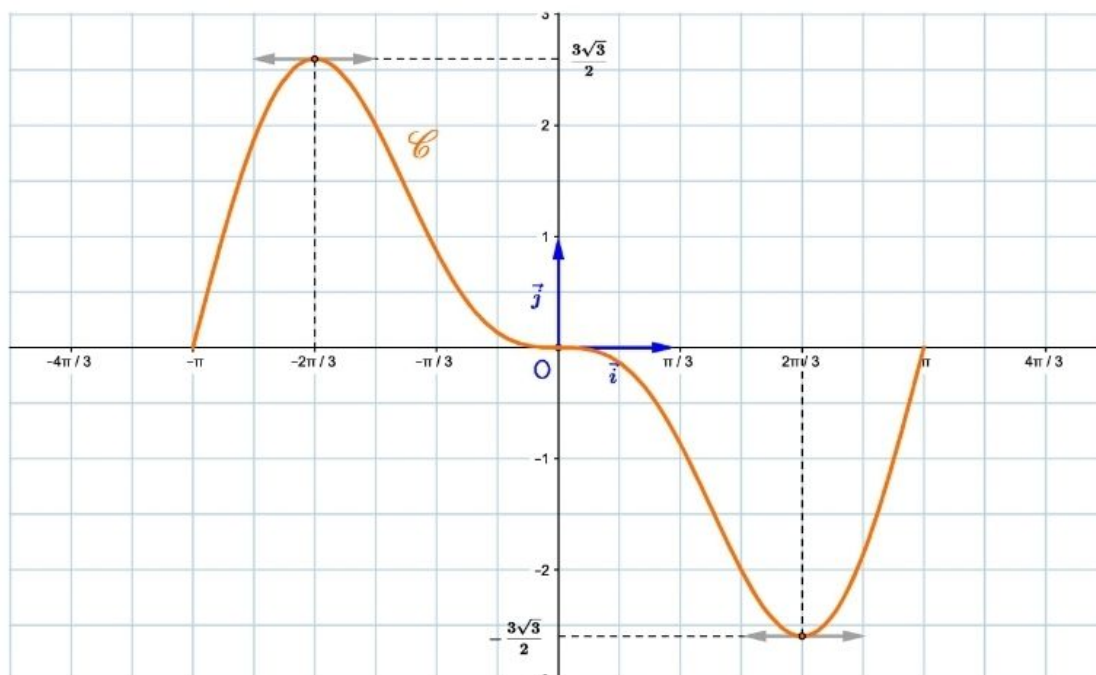
$$f'(x) = 2\cos(2x) - 2\cos x = 2(2\cos^2 x - 1) - 2\cos x = 4\cos^2 x - 2\cos x - 2 \\ = 2 \times P(\cos x)$$

$$\text{Soit } x \in [0, \pi], f'(x) \leq 0 \Leftrightarrow P(\cos x) \leq 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2} \leq \cos x \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq x \leq \frac{2\pi}{3}$$



x	0	$\frac{2\pi}{3}$	π
$f'(x)$	0	-	+
f	0	$-\frac{3\sqrt{3}}{2}$	2

3)

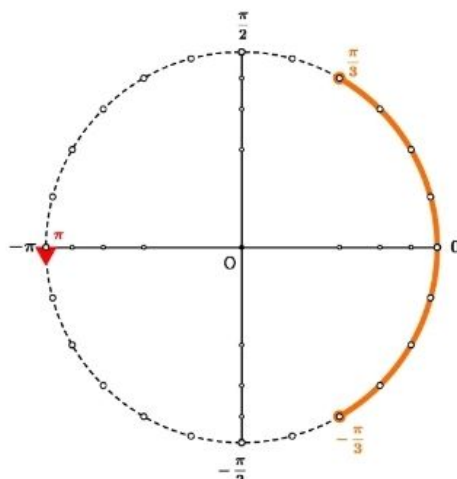


Exercice 8

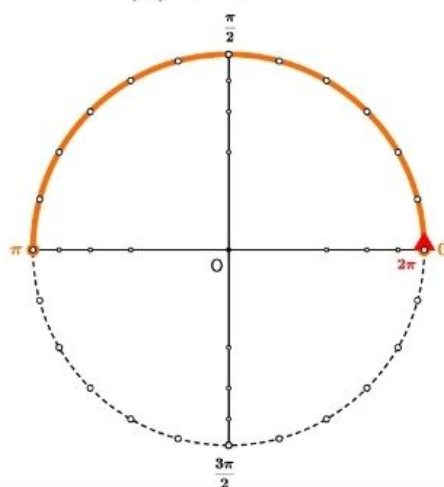
1) $1 + \sin x = 0 \Leftrightarrow \sin x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ donc $D_f = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$

2) Si $x \in D_f$ alors $x \neq -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x + 2\pi \neq -\frac{\pi}{2} + 2(k+1)\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow (x + 2\pi) \in D_f$

Pour $x \in D_f$, $f(x + 2\pi) = \frac{\cos(x + 2\pi)}{1 + \sin(x + 2\pi)} = \frac{\cos x}{1 + \sin x} = f(x)$ donc f est périodique de période 2π

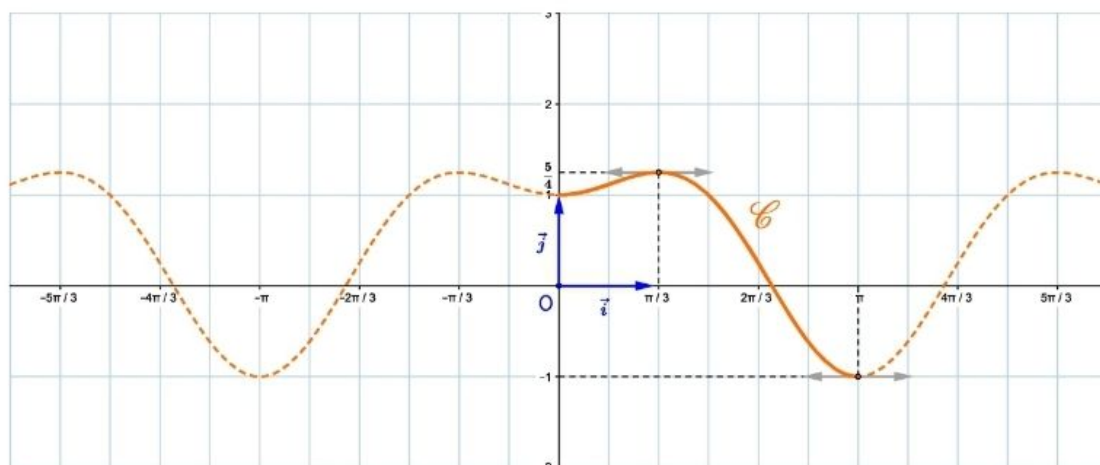


$$\sin x \geq 0 \Leftrightarrow 2k\pi \leq x \leq \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \text{ donc } S_{[0, \pi]} = [0, \pi]$$



x	0	$\frac{\pi}{3}$	π
$2 \cos x - 1$	+	○	-
$\sin x$	○	+	+
$f'(x)$	○	+	-
f	1	$\frac{5}{4}$	-1

4)



FONCTIONS TRIGONOMETRIQUES

EXERCICE 1: 5.5 POINTS

BAREME

On définit la fonction f sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 1 + \sin 2x + 2 \cos x$.

1- Etudier la parité et la périodicité de f

0.5

2-a- Montrer que le point $A\left(\frac{\pi}{2}; 1\right)$ est un centre de symétrie de la courbe $\mathcal{C}_f$

1

b- En déduire que l'on peut étudier f sur l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$

0.5

3-a- Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $f'(x) = -2(2 \sin x - 1)(1 + \sin x)$

1

b- Dresser le tableau de variations de f sur $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$

0.75

4- La courbe ci dessous est celle de la restriction de f à l'intervalle $[0; \pi]$

1

Compléter sur la feuille annexe la courbe $\mathcal{C}_f$ sur l'intervalle $\left[-2\pi; \frac{3\pi}{2}\right]$

4- Soit g la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 1 + \sin 2x + 2 \sin x$.

0.75

Montrer que la courbe $\mathcal{C}_g$ est l'image de $\mathcal{C}_f$ par une translation que l'on précisera

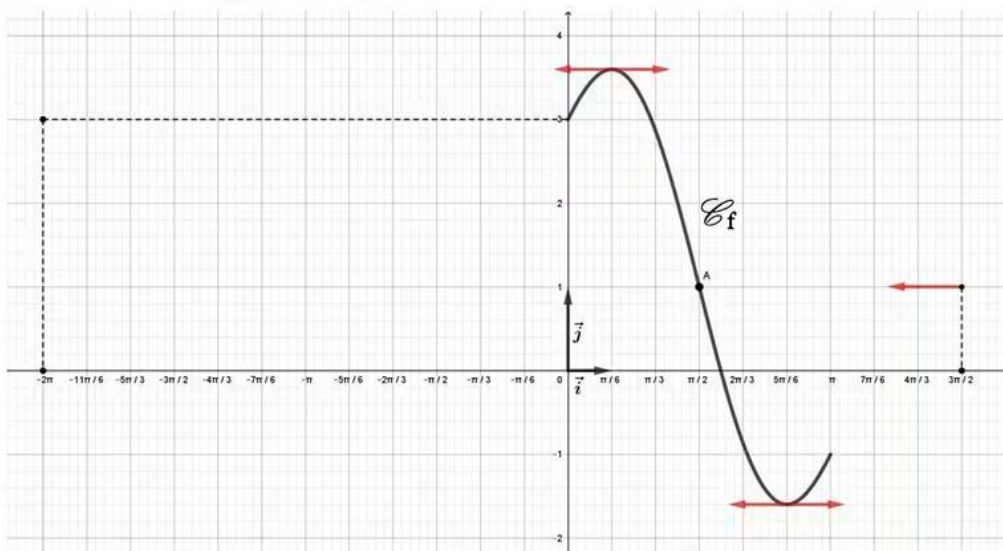


Figure 1

EXERCICE 2: 3.5 POINTS

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (1 - \cos x) \sin x$

1- Vérifier que f est impaire et périodique

0,5

2- Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $f'(x) = (1 - \cos x)(2 \cos x + 1)$

1

3- Dresser le tableau de variation de f sur $[-\pi; \pi]$

0,5

4- Compléter sur la figure la courbe

$\mathcal{C}_f$ de f sur $[-\pi; 2\pi]$

1

5- Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x) \sin x}{x^3}$

0,5

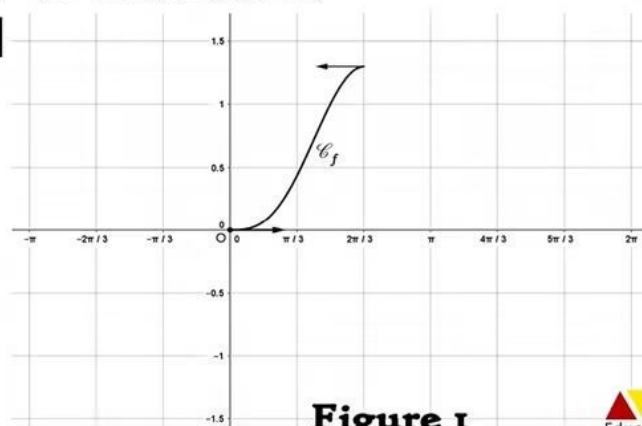


Figure 1



EXERCICE 3: 3 POINTS**BAREME**

On définit la fonction f sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = x - \sin x$.

1- a- Montrer que f est croissante sur $[0; +\infty[$

0.5

b- En déduire que $f(x) \geq 0$ pour tout $x \in [0; +\infty[$

0.25

2- On définit la fonction g sur $[0; +\infty[$ par $g(x) = \cos x - 1 + \frac{x^2}{2}$

a- Montrer que $g'(x) = f(x)$ puis que $g(x) \geq 0$

0.75

b- En déduire que pour tout $x \in [0; +\infty[$ $1 - \frac{x^2}{2} \leq \cos x \leq 1$

0.5

c- l'inégalité est-elle encore vraie si x est négatif. Justifier la réponse

0.75

4- En étudiant la fonction

h définie sur $[0; +\infty[$ par $h(x) = \sin x - x + \frac{x^3}{6}$.

0.75

Montrer que pour tout $x \in [0; +\infty[$ $x - \frac{x^3}{6} \leq \sin x \leq x$

