

Chapitre IX

Les suites réelles

■ Généralités :

- Une suite numérique est une application de $\mathbb{N}$ (ou une partie de $\mathbb{N}$) dans $\mathbb{R}$.
- Une suite peut-être définie entre autres :
 - Une façon **explicite** : $U_n = f(n)$ (exemple : $U_n = 2n - 1$).
 - **La récurrence** : U_0 donné et $U_{n+1} = f(U_n)$, (exemple : $U_{n+2} = U_n - 5$).
- **Principe de raisonnement par récurrence.**
 Soit (U) une suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$; (ou une partie I de $\mathbb{N}$)
 on désigne par Q une propriété .
 Pour que Q est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$, il suffit de prouver que :
 - La propriété Q est vraie pour l'ordre 0 (le 1^{er} ordre)
 - Supposons que la propriété est vraie pour l'ordre p ($p \in \mathbb{N}$ resp $p \in I$)
 - Montrons que la propriété est vraie pour l'ordre $p + 1$.

■ Suites arithmétiques- Suites géométriques :

	Suite arithmétique	Suite géométrique
Définition	$U_{n+1} = U_n + r$ ($r \in \mathbb{R}$)	$U_{n+1} = q U_n$ ($q \in \mathbb{R}$)
Raison	r	q
Terme général	$U_n = U_0 + n \cdot r$	$U_n = q^n \cdot U_0$
Relation entre Deux termes quelconques	$U_n = U_p + (n - p)r$	$U_n = q^{n-p} U_p, q \neq 0$ (si $q=0$ alors $U_n=0$)
Somme $S = U_0 + U_1 + \dots + U_n$	$S = \frac{(n+1)(U_0 + U_n)}{2}$	Si $q = 1$ alors $S = (n + 1) U_0$ Si $q \neq 1$ alors $S = U_0 \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$

■ Relations entre trois termes consécutifs a, b, c d'une suite :

- Pour une suite arithmétique alors on a : $a + c = 2b$.
- Pour une suite géométrique alors on a : $a \cdot c = b^2$.

■ Suites monotones- Majorées – Minorées- Bornées :

➤ Monotonie: Une suite numérique U est:

- **Croissante** si et seulement si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n \leq U_{n+1}$.
- **Décroissante** si et seulement si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n \geq U_{n+1}$.
- **Constante** si et seulement si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} = U_n$.
- **Strictement croissante** pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n < U_{n+1}$.
- **Strictement décroissante** pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n > U_{n+1}$.

■ Suite bornée :

Une suite numérique U est :

-**Majorée** par un réel M si et seulement si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n \leq M$.

-**Minorée** par un réel m si et seulement si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n \geq m$.

- **Bornée** si et seulement si elle est à la fois majorée et minorée.

■ Conséquence :

- Toute suite croissante est minorée par son premier terme ($U_n \geq U_0$)
- Toute suite décroissante est majorée par son premier terme. ($U_0 \geq U_n$)

Réflexes :

Situations	Réflexes
Comment étudier les variations d'une suite ?	• On étudie le signe de $U_{n+1} - U_n$. • Où, Si $U_n = f(n)$ on étudie le sens de variation de f sur $[0, +\infty[$. • Où si $U_n > 0$ on compare $\frac{U_{n+1}}{U_n}$ à 1. • Où par récurrence.
Comment démontrer qu'une suite u est majorée par M ? (de même pour minorée)	• On étudie le signe de $U_n - M$. • On montre par récurrence ce que $U_n \leq M$. • Où si $U_n = f(n)$ on dresse le tableau de variation de f on établit que f est majorée par M.