

Chapitre VIII

Vecteurs de l'espace

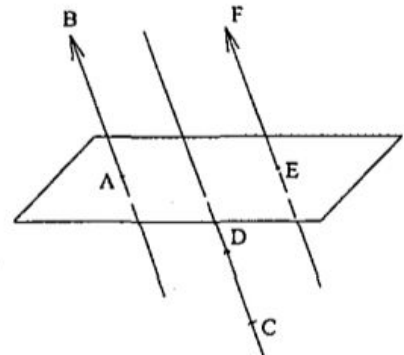
■ Caractérisation d'un vecteur de l'espace :

Si $A \neq B$ et $C \neq D$, on dira que les vecteurs

$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont égaux si :

- Les droites (AB) et (CD) sont parallèles.
- $AB = CD$.
- Le sens (de A vers B, de C vers D) sont les mêmes.

On notera $\vec{u} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{EF} = \dots\dots\dots$



Le vecteur nul, noté $\vec{0}$ est le vecteur dont les représentants sont : $\overrightarrow{AA}$, $\overrightarrow{BB}$,.....

Soit $\vec{u}$ un vecteur et A un point de l'espace, il existe un unique point B tel que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$

■ Propriétés :

Soient $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ trois vecteurs de l'espace et k, k' deux réels :

$\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$	$(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$
$\vec{u} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{u} = \vec{u}$	$0 \cdot \vec{u} = \vec{0}$
Relation de Chasles : $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{BC}$ $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$	$k(\vec{u} + \vec{v}) = k\vec{u} + k\vec{v}$ $(k + k')\vec{u} = k\vec{u} + k'\vec{u}$
$\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}$	$(k \cdot k')\vec{u} = k(k'\vec{u})$

■ Vecteurs colinéaires – vecteurs coplanaires :

$\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AD}$

On dit que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires
Si A, B et D sont alignés

$\vec{u}, \vec{v}$ deux vecteurs non nuls.

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si il existe un réel k tel que $\vec{u} = k\vec{v}$

$\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires si et seulement si il existe deux réels α et β tel que $\vec{w} = \alpha \vec{u} + \beta \vec{v}$.

On dit aussi $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ sont linéairement dépendants ou $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ forme une famille liée

Remarque : Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires alors $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires.

■ Bases et repères de l'espace :

Tout triplet $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de vecteurs non coplanaires de l'espace est appelé base.

Soit $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ base et $\vec{u}$ un vecteur, il existe un unique triplet

(x, y, z) tel que $\vec{u} = x \vec{i} + y \vec{j} + z \vec{k}$.

x, y et z sont les coordonnées de $\vec{u}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Notation : $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

Si O un point et $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ base alors $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est un repère.

$(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ repère, M un point on appelle coordonnées de M l'unique triplet (x, y, z) tel que $\overrightarrow{OM} = x \vec{i} + y \vec{j} + z \vec{k}$

Notation : $M(x, y, z)$ avec x : l'abscisse, y : l'ordonnée et z : la côte

Propriétés: Soit $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère

* Si $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\vec{u}' \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ alors $\vec{u} + \vec{u}' \begin{pmatrix} x+x' \\ y+y' \\ z+z' \end{pmatrix}$ * Soit $k \in \mathbb{R}$; $k \vec{u} \begin{pmatrix} kx \\ ky \\ kz \end{pmatrix}$.

* Si A (x_A, y_A, z_A) et B (x_B, y_B, z_B) Alors $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix}$

* Si I est le milieu de $[AB]$ alors I $\left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}, \frac{z_A + z_B}{2} \right)$

* $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\vec{u}' \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ sont **colinéaires** si et seulement si $\begin{cases} \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = xy' - x'y = 0 \\ \begin{vmatrix} x & x' \\ z & z' \end{vmatrix} = xz' - x'z = 0 \\ \begin{vmatrix} y & y' \\ z & z' \end{vmatrix} = yz' - y'z = 0 \end{cases}$

■ Bases orthonormales et repères orthonormaux :

* $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ base si de plus $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = \|\vec{k}\| = 1$ et $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ deux à deux orthogonaux alors c'est une base orthonormale.

* $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ repère orthonormé si et seulement si $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est une base orthonormale et O est un point de l'espace.

* $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est un repère orthogonal et seulement si $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ sont deux à deux orthogonaux et O un point de l'espace.

* $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ repère orthonormé et $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ alors $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

■ **Définition** : Soit $\mathcal{B} = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ une base de $\mathcal{W}$ et $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ un triplet de vecteurs de $\mathcal{W}$.

tels que $\vec{u} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, $\vec{v} \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$ et $\vec{w} \begin{pmatrix} a'' \\ b'' \\ c'' \end{pmatrix}$. On appelle déterminant de $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ dans $\mathcal{B}$,

et on note $\det_{\mathcal{B}}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \begin{vmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{vmatrix} = a(b'c'' - c'b'') - b(a'c'' - c'a'') + c(a'b'' - b'a'')$.

*Théorème

Un triplet de vecteur de $\mathcal{W}$ forme une base, si et seulement si, son déterminant relativement à une base quelconque de $\mathcal{W}$ est différent de 0.

***Règle de SARRUS pour le calcul déterminant d'ordre 3:**

Soit à calculer $\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \begin{vmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{vmatrix}$ D'après SARRUS. On écrit le

déterminant et on recopie les deux premières colonnes puis on fait la somme de produits de 3 facteurs pris sur une même diagonale.

$$\begin{array}{ccccc} + & + & + & - & - & - \\ a & a' & a'' & a & a' \\ b & b' & b'' & b & b' \\ c & c' & c'' & c & c' \end{array}$$

le $\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = ab'c'' + a'b''c + a''bc' - a''b'c - ab''c' - a'bc''$

Réflexes:

Situations	Réflexes
Comment démontrer que deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires ?	• On établit une relation vectorielle $\vec{u} = k\vec{v}$ où k est un réel. Pour cela on peut être amené à utiliser la relation de Chasles. • Ou si, dans un repère, $\vec{u}(x;y;z)$ et $\vec{v}(x';y';z')$, on démontre qu'il existe un réel k tel que : $x = k \times x'$; $y = k \times y'$ et $z = k \times z'$ • Ou si $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{CD}$, on démontre que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont la même direction c'est à dire que : $(AB) // (CD)$.
Comment démontrer que deux droites (AB) et (CD) sont parallèles ?	On démontre que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires
Comment démontrer que trois points A, B et C sont alignés ?	On démontre que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ (ou $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BC}$, ou ...) sont colinéaires c'est à dire que $\overrightarrow{AB} = K \overrightarrow{CD}$ avec k réels. Ou on démontre que $\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$
Comment démontrer que trois vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires ?	• On établit que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$, $\vec{w} = \overrightarrow{AD}$ avec A, B, C, D dans un même plan. • ou on établit une relation vectorielle $\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$ avec a et b réels. • ou $\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = 0$