

EXERCICE 01 :

Soit la suite (U_n) définie par :
$$\begin{cases} U_0 = \frac{3}{2} \\ U_{n+1} = \frac{4U_n - 2}{U_n + 1} \end{cases}$$

1. Calculer U_1 ; U_2 . Dédurre que la suite n'est ni arithmétique ni géométrique.
2. Vérifier que pour tout n : $U_{n+1} = 4 - \frac{6}{U_n + 1}$.
3. Montrer que pour tout n non nul on a : $1 < U_n < 2$.
4. Montrer que la suite (U_n) est croissante.
5. Dédurre la convergence de (U_n) .
6. Soit la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $V_n = \frac{U_n - 2}{U_n - 1}$. Montrer que la suite V est géométrique.
7. Exprimer (V_n) puis (U_n) en fonction de n . Déterminer la limite de la suite (U_n) .

EXERCICE 02 :

Soit la suite (U_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :
$$\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \frac{(U_n)^2 + 2}{U_n} \end{cases}$$

1. Montrer que pour tout n on a : $U_n > 0$.
2. Etudier la monotonie de la suite (U_n) .
3. Montrer que la suite (U_n) n'est pas majorée. En déduire sa limite.
4. On pose la suite (V_n) définie par : $V_n = \frac{(U_n)^2}{4}$. Montrer que $V_{n+1} - V_n \geq 1$.
5. Montrer que $V_n \geq n$ puis déterminer sa limite.
6. Montrer que pour tout n non nul on a : $V_{n+1} - V_n \leq 1 + \frac{1}{4n}$.
7. Soit la suite W définie sur $\mathbb{N}$ par : $W_n = V_{n+1} - V_n$.

Montrer que W est convergente et calculer sa limite.

EXERCICE 03 :

Soit la suite (U_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :
$$\begin{cases} U_0 = \frac{1}{2} \\ U_{n+1} = \frac{2U_n}{1 + (U_n)^2} \end{cases}$$

1. Montrer que pour tout n on a : $0 < U_n < 1$.
2. Montrer que la suite U est monotone.
3. Dédurre la convergence de U .
4. Soit la suite V définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $V_n = \frac{1 - U_n}{U_n + 1}$.

a. Montrer que pour tout n on a : $V_{n+1} = (V_n)^2$.

b. Montrer que pour tout n on a : $V_n = \left(\frac{1}{3}\right)^{2^n}$.

5. a. Calculer $S_n = \sum_{k=0}^n 2^k$ en fonction de n .

b. Soit $P_n = V_0 \times V_1 \times \dots \times V_n$. Exprimer P_n en fonction de n .

c. Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{P_n}{V_{n+1}}\right)$

EXERCICE 04 :

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par
$$\begin{cases} u_0 = \frac{3}{2} \\ u_{n+1} = \frac{\sqrt{3u_n^2 + 4}}{2}, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

1) a) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < u_n < 2$.

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1}^2 - u_n^2 = \frac{4 - u_n^2}{4}$.

c) En déduire que la suite (u_n) est convergente.

2) Soit (v_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = u_n^2 - 4$.

a) Montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{3}{4}$.

b) Exprimer v_n en fonction de n .

c) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \sqrt{4 - \frac{7}{4} \times \left(\frac{3}{4}\right)^n}$.

3) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $S_n = \sum_{k=0}^n u_k^2$.

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = -7 \times \left(1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}\right) + 4(n+1)$, puis calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{S_n}{n}$.

EXERCICE 05 :

Soit U la suite réelle définie sur $\mathbb{N}$ par :
$$\begin{cases} U_0 = 1; U_1 = 2 \\ U_{n+2} = U_{n+1} - \frac{1}{4}U_n \end{cases}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $V_n = 2U_{n+1} - U_n$ et $W_n = 2^n U_n$.

1) Montrer que la suite V est géométrique et exprimer V_n en fonction de n .

2) Montrer que la suite W est arithmétique et exprimer W_n en fonction de n .

3) En déduire U_n en fonction de n .

4) Soit pour tout $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$, $t_n = \frac{6n+2}{n^2-n}$.

- a) Montrer par récurrence que pour tout entier $n \geq 3$: $\left(\frac{1}{2}\right)^n < \frac{2}{n^2 - n}$.
- b) En déduire que pour tout $n \geq 2$: $U_n < t_n$.
- c) Montrer alors que la suite U est convergente et calculer sa limite.
- 5) Soit pour $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \sum_{k=0}^n U_k$.
- a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $S_n = 4 \cdot (U_1 - U_{n+2})$.
- b) En déduire S_n en fonction de n .

EXERCICE 06 :

Soit la suite (U_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :
$$\begin{cases} U_0 = \alpha \\ U_{n+1} = \frac{2}{\sqrt{4 - (U_n)^2}} \end{cases} \quad \text{où } \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-2; 2\}$$

1. Déterminer α pour que la suite (U_n) soit constante.

Pour la suite de l'exercice on considère $\alpha = 0$

2. Montrer par récurrence que pour tout n on a : $0 \leq U_n < \sqrt{2}$.

3. Soit la suite (V_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $V_n = \frac{3(U_n)^2}{2 - (U_n)^2}$

a. Montrer que (V_n) est une suite arithmétique de raison 3.

b. Exprimer (V_n) puis (U_n) en fonction de n .

c. Calculer alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$.

4. a. Vérifier que pour tout n on a : $(U_n)^2 = 2 - \frac{2}{n+1}$

b. Soit $S_n = (U_0)^2 + (U_1)^2 + (U_2)^2 + \dots + (U_{n-1})^2$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a : $S_n = 2n - 2 \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}\right)$.

5. Soit la suite (T_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $T_n = (U_0)^2 \times (U_1)^2 \times (U_2)^2 \times \dots \times (U_n)^2$

a. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a : $T_n = \frac{2^n}{n+1}$

b. Calculer alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n \times T_n)$.