

ENONCES

1 QCM

Indiquer la bonne réponse par a, b ou c et justifier votre réponse.
 ABCDEFGH est un cube, I le milieu de $[AB]$, J et K les centres des faces EFGH et BCGF

1) Le vecteur $\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{FG}$ est égal au vecteur ...

☐ a $\overrightarrow{AG}$

☐ b $\overrightarrow{DG}$

☐ c $\overrightarrow{DF}$

2) Les vecteurs $\overrightarrow{JE}$ et $\overrightarrow{JG}$ sont ...

☐ a égaux

☐ b colinéaires

☐ c orthogonaux

3) Les vecteurs $\overrightarrow{IJ}$, $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{DE}$ sont ...

☐ a colinéaires deux à deux

☐ b coplanaires

☐ c ni l'un ni l'autre

4) Dans le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AE})$, le point J a pour coordonnées ...

☐ a $\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 1\right)$

☐ b $(0; 0; 1)$

☐ c $\left(0; \frac{1}{2}; 1\right)$

5) Les vecteurs $\overrightarrow{JK}$ et $\frac{1}{2}\overrightarrow{EI}$ sont ...

☐ a colinéaires

☐ b orthogonaux

☐ c ni l'un ni l'autre

2 Vrai - Faux

Dire si l'affirmation est vraie ou fausse. Justifier votre réponse.

1) ABCDEFGH est le cube d'arête 1, I le milieu de $[AB]$ J et K les centres des faces EFGH et BCGF

a) Le vecteurs $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BF}$ est colinéaire au vecteur $\overrightarrow{GB}$

b) Le vecteur $\overrightarrow{KJ}$ est colinéaire au vecteur $\overrightarrow{EB}$.

c) Les points A, I, K, J sont coplanaires.

d) Dans le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$, la distance JK est égale à $\frac{\sqrt{2}}{3}$.

2) Deux vecteurs quelconques de l'espace sont coplanaires.

3) Trois vecteurs dont la somme est égale au vecteur nul sont coplanaires.

4) Si A, B, C, D sont des points coplanaires alors pour tout point M de l'espace, les vecteurs $\overrightarrow{MA}$, $\overrightarrow{MB}$, $\overrightarrow{MC}$ et $\overrightarrow{MD}$ sont coplanaires.

5) A, B, C, D, E sont des points de l'espace tels que $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AE} = 3\overrightarrow{AC}$.

Alors les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{DE}$ sont coplanaires.

3 On donne ABCD un tétraèdre et on rapporte l'espace au repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$. Déterminer les coordonnées des centres de gravités des quatre faces du tétraèdre.

4 ABCD désigne un tétraèdre, I, J, K et L les milieux respectifs des segments [AB], [BC], [CD] et [DA]. Prouver que I, J, K et L sont coplanaires.

5 ABCDA'B'C'D' un cube. On note I le milieu de [A'D'], J celui de [AD], K celui de [B'C'] et L celui de [BC].

1) a) Démontrer que les points I, J, K, L sont coplanaires.

b) Démontrer que $\overrightarrow{D'K}, \overrightarrow{D'C'}, \overrightarrow{B'C'}$ sont coplanaires.

c) Comparer $\overrightarrow{IB'}$ et $\overrightarrow{D'K}$

2) Démontrer que les plans (IJB') et (D'KL) sont parallèles.

6 Soit $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ une base et m un paramètre réel donné, on donne :

$$\vec{u} = (m+1)\vec{i} + (m+2)\vec{j} + (2m+3)\vec{k} ; \vec{v} = (2m+4)\vec{i} + (m+8)\vec{j} + (6+9m)\vec{k}$$

$$\text{et } \vec{w} = 2\vec{i} + 9\vec{j} - \vec{k}$$

a) Pour quelle valeur de m, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires ?

b) Pour $m = -1$, Montrer que $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires.

7 ABCD un tétraèdre ; I, J, K et L sont les points définis par :
 $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{BJ} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BC} ; \overrightarrow{CK} = \frac{3}{8}\overrightarrow{CD} ; \overrightarrow{AL} = \frac{1}{6}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD})$

1) Calculer les coordonnées des points I, J, K et L dans le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$

2) Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{IL}$ et $\overrightarrow{JK}$ et déterminer le réel k tel que $\overrightarrow{IL} = k \overrightarrow{JK}$.

8 L'espace est rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on donne

les points : $A(1,0,2), B(2,1,\frac{3}{2}) ; C(3,2,-\frac{5}{2}) ; D(2,1,-2) ; E(3,2,1) ; F(6,5,-11)$

Montrer que :

1) A, B et E sont alignés.

2) ABCD est un parallélogramme.

3) F appartient au plan(ABC).



ABCD est un tétraèdre ; A', B', C' et D' désignent les centres de gravité respectifs des triangles BCD, CDA, DAB et ABC.

Le point G vérifie $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$.

- 1) Vérifier que $\overrightarrow{GD} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = 3\overrightarrow{GA'}$.
- 2) En déduire que G appartient à la droite (AA'). Ecrire alors $\overrightarrow{AG}$ en fonction de $\overrightarrow{AA'}$.
- 3) En déduire que les droites (AA'), (BB'), (CC') et (DD') sont concourantes en G.
- 4) On désigne par I, J, K, L, M et N les milieux respectifs des arêtes [AB] ; [CD] ; [AC] ; [BD] ; [AD] et [BC].
 - a) Prouver les égalités : $\overrightarrow{GI} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB})$ et $\overrightarrow{GJ} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD})$
 - b) En déduire que G est le milieu de [IJ].
 - c) Montrer que (IJ), (KL) et (MN) sont concourantes en G.
 - d) Montrer que $\overrightarrow{GA'} + \overrightarrow{GB'} + \overrightarrow{GC'} + \overrightarrow{GD'} = \vec{0}$



ABCD A'B'C'D' un cube et le repère $R(\overrightarrow{A}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AA'})$

- 1) a) Trouver les coordonnées des points D, D', B' et C' dans R.
- b) Soit O le milieu de [B'C']. Trouver les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{OC}$.
- 2) Soient $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{v} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{w} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ dans la base $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AA'})$
 - a) Montrer que $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont non coplanaires.
 - b) Soit le repère $R'(\overrightarrow{A}, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ déterminer les coordonnées des points B, C et A' dans R' puis du vecteur $\overrightarrow{OC}$ dans la base $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$.



Dans l'espace muni d'un repère orthonormal $(0, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les points : A (-7, -15, 3) ; B (-4, 20, -1) ; C (4, 5, 30) et D (25, 0, 2). On appelle I le milieu de [DC] et J celui de [AB]. On appelle K le point vérifiant $\overrightarrow{KA} + \overrightarrow{KB} + \overrightarrow{KC} + \overrightarrow{KD} = \vec{0}$.

- 1) Calculer les distances AB, AC, AD, BC, BD et CD. En déduire la nature du tétraèdre ABCD.

- 2) Soit $G \left(\frac{25}{3}, \frac{25}{3}, \frac{31}{3} \right)$, montrer que G est le centre de gravité du triangle BCD.
- 3) a) Trouver les coordonnées de K.
 b) Montrer que les droites (AG) et (BD) sont orthogonales.
 c) Montrer que A, K et G sont alignés.
 d) Montrer que $\overrightarrow{IK}$ et $\overrightarrow{IJ}$ sont colinéaires.



ABCDEF GH est un cube d'arête 1 cm de longueur.

I, J et K sont les milieux respectifs des arêtes $[EH]$; $[EF]$ et $[FB]$.

P est le plan (IJK). On se place dans le repère orthonormal. $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$

- 1) a) Calculer les coordonnées des points I, J, K et G.

En déduire les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{IJ}$, $\overrightarrow{JK}$ et $\overrightarrow{AG}$.

- b) Montrer que la droite (AG) est orthogonale au plan P.

- 2) a) L, M et N sont les milieux respectifs des arêtes $[BC]$, $[CD]$ et $[DH]$.

Calculer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{IL}$, $\overrightarrow{IM}$ et $\overrightarrow{IN}$.

- b) Etudier l'orthogonalité des vecteurs $\overrightarrow{AG}$ et $\overrightarrow{IL}$; $\overrightarrow{AG}$ et $\overrightarrow{IM}$, $\overrightarrow{AG}$ et $\overrightarrow{IN}$.

En déduire que les points M, N et L appartiennent au plan P.

- 3) a) Calculer les coordonnées du centre O du cube. Montrer que O appartient au plan P.

- b) Montrer que l'hexagone IJKLMN est un hexagone régulier de centre O.

CORRIGES

1 QCM

1) La réponse est **a** :

$$\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB} \Rightarrow \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{FG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{FG} = \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{FG} = \overrightarrow{AG}.$$

2) La réponse est **b** : $J = E * G \Leftrightarrow \overrightarrow{JE} = -\overrightarrow{JG}.$

3) La réponse est **c**

4) La réponse est **c** : car $I \in (ACE)$ et $I \notin (AC).$

5) La réponse est **c** : car $\overrightarrow{JK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{EB}$ et $\overrightarrow{EI}$ et $\overrightarrow{EB}$ ni colinéaires ni perpendiculaires.

2 Vrai - Faux

1) a) Faux: $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BF} = \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BF} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{BF} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{DE}$

et $\overrightarrow{DE}$ et $\overrightarrow{GB}$ sont colinéaires.

b) Vrai: dans le triangle GEB on a $J = E * G$ et $K = B * G$

$$\text{alors } \overrightarrow{KJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BE} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{EB}.$$

c) Faux: (AI) et (KJ) sont non coplanaires.

$$\text{d) Faux: } JK = \frac{1}{2}EB = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

2) Vrai: on peut toujours avoir deux représentants de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ coplanaires.

3) Vrai: $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w} = \vec{0} \Rightarrow \vec{w} = -\vec{u} - \vec{v}$ donc $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ coplanaires.

4) Faux: le Cube ABCDA'B'C'D' et $\overrightarrow{A'A}, \overrightarrow{A'B}, \overrightarrow{A'C}$ et $\overrightarrow{A'D}$ sont non coplanaires.

5) Vrai: $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AE} = 3\overrightarrow{AC}$ alors $\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AE} = 2\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC}$

donc $\overrightarrow{ED} = 2\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC}$ ainsi $\overrightarrow{ED}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ sont coplanaires.

3

Par définition du repère on a :

A (0, 0, 0) ; B (1, 0, 0) ; C (0, 1, 0) et D (0, 0, 1).

G le centre de gravité de ABC alors $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$ on pose : G (x, y, z) ;

$$\overrightarrow{GA} \begin{pmatrix} -x \\ -y \\ -z \end{pmatrix} \overrightarrow{GB} \begin{pmatrix} 1-x \\ -y \\ -z \end{pmatrix} \overrightarrow{GC} \begin{pmatrix} -x \\ 1-y \\ -z \end{pmatrix}. \text{ La relation } \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0} \text{ équivaut à :}$$

$$\begin{cases} (-x) + (1-x) + (-x) = 0 \\ (-y) + (-y) + (1-y) = 0 \\ -3z = 0 \end{cases} \text{ ou encore } \begin{cases} x = \frac{1}{3} \\ y = \frac{1}{3} \\ z = 0 \end{cases}$$

d'où $G\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0\right)$ de même pour les autres centre de gravité :

G_1 le centre de gravité ABD, alors $G_1\left(\frac{1}{3}, 0, \frac{1}{3}\right)$.

G_2 le centre de gravité ACD, alors $G_2\left(0, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$.

G_3 le centre de gravité BDC, alors $G_3\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$.



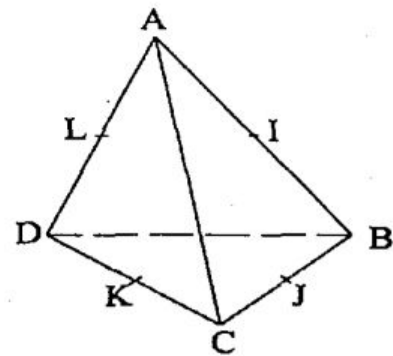
Dans le triangle ABD on a :

$I = A * B$ et $L = A * D$ alors $\overrightarrow{LI} = \frac{1}{2} \overrightarrow{DB}$.

Dans le triangle BCD on a :

$K = D * C$ et $J = B * C$ alors $\overrightarrow{KJ} = \frac{1}{2} \overrightarrow{DB}$.

Donc $\overrightarrow{LI} = \overrightarrow{KJ}$ par suite (LI) est parallèle à (KJ) ainsi I, J, K et L sont coplanaires.



1) a) On a $\overrightarrow{AJ} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{BL} = \frac{1}{2} \overrightarrow{BC}$

or $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ (ABCD carré) donc

$\overrightarrow{AJ} = \overrightarrow{BL}$ ou encore $\overrightarrow{JL} = \overrightarrow{AB}$ de même on trouve :

$\overrightarrow{IK} = \overrightarrow{A'B'}$ comme $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'}$ (ABB'A' un carré) d'où $\overrightarrow{JL} = \overrightarrow{IK}$

par suite (JL) // (IK). Par suite I, J, K et L son coplanaires.

b) $\overrightarrow{D'K} = \overrightarrow{D'C'} + \overrightarrow{C'K}$ or $K = B' * C'$ ou encore $\overrightarrow{C'K} = \frac{1}{2} \overrightarrow{C'B'}$.

$\overrightarrow{D'K} = \overrightarrow{D'C'} + \frac{1}{2} \overrightarrow{C'B'}$ par suite $\overrightarrow{D'K}$, $\overrightarrow{D'C'}$ et $\overrightarrow{C'B'}$ sont coplanaires.

c) On a : $\overrightarrow{IB'} = \overrightarrow{IA'} + \overrightarrow{A'B'}$ or $I = A' * D'$ ou encore $\overrightarrow{IA'} = \frac{1}{2} \overrightarrow{DA'}$.

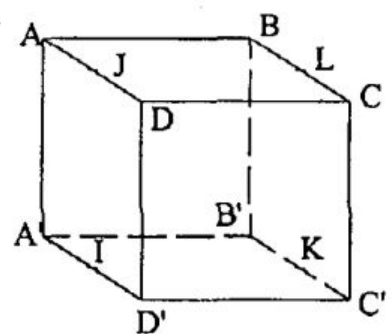
$= \frac{1}{2} \overrightarrow{D'A'} + \overrightarrow{A'B'}$ comme $\overrightarrow{A'D'} = \overrightarrow{B'C'}$ et $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{D'C'}$

$= \frac{1}{2} \overrightarrow{C'B'} + \overrightarrow{D'C'}$ or $\overrightarrow{D'K} = \overrightarrow{D'C'} + \frac{1}{2} \overrightarrow{C'B'}$.

Par suite $\overrightarrow{IB'} = \overrightarrow{D'K}$.

2) La droite (IJ) est parallèle à la droite (KL) donc au plan (D'KL). La droite (IB') est parallèle à la droite (D'K) (car $\overrightarrow{IB'} = \overrightarrow{D'K}$) donc au plan (D'KL).

Les deux droites (IJ) et (IB') du plan (IJB') sont sécantes en I et toutes deux parallèles au plan (D'KL) par suite (IJB') est parallèle au plan (D'KL).





a) $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si :

$$\begin{vmatrix} m+1 & 2m+4 \\ m+2 & m+8 \end{vmatrix} = 0 \text{ et } \begin{vmatrix} m+1 & 2m+4 \\ 2m+3 & 6+9m \end{vmatrix} = 0 \text{ et } \begin{vmatrix} m+2 & m+8 \\ 2m+3 & 6+9m \end{vmatrix} = 0$$

équivalent à $(m+1)(m+8) - 2(m+2)^2 = 0$ et $(m+1)(6+9m) - (2m+3)(2m+4) = 0$ et $(m+2)(6+9m) - (m+8)(2m+3) = 0$

ou encore $-m^2 + m = 0$ et $5m^2 + m - 6 = 0$ et $7m^2 + 5m - 12 = 0$.

* $-m^2 + m = 0 \Leftrightarrow m \cdot (-m + 1) = 0 \Leftrightarrow m = 0$ ou $m = 1$.

$m = 0$ n'est pas solution des dernières équations mais $m = 1$ est vérifié pour les équations.

b) Pour $m = -1$, on a : $\vec{u} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\vec{v} \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ -3 \end{pmatrix}$; $\vec{w} \begin{pmatrix} 2 \\ 9 \\ -1 \end{pmatrix}$

1^{ère} Méthode:

cherchons deux réels α et β tel que $\vec{w} = \alpha \vec{u} + \beta \vec{v}$.

$$\begin{cases} 2 = 2\beta \\ 9 = \alpha + 7\beta \\ -1 = \alpha - 3\beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = 1 \\ \alpha = 2 \end{cases} \text{ d'ou } \vec{w} = 2\vec{u} + \vec{v} \text{ par suite } \vec{u}, \vec{v} \text{ et } \vec{w} \text{ sont coplanaires.}$$

2^{ème} Méthode:

$$\text{Dét}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & 7 & 9 \\ 1 & -3 & -1 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} = -4 + 4 = 0$$

par suite $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires.



1) * $\vec{AI} = \frac{1}{3} \vec{AB} + 0 \cdot \vec{AC} + 0 \cdot \vec{AD}$ d'ou $I \left(\frac{1}{3}, 0, 0 \right)$

$$\begin{aligned} * \vec{AJ} &= \vec{AB} + \vec{BJ} = \vec{AB} + \frac{1}{4} \vec{BC} = \vec{AB} + \frac{1}{4} (\vec{BA} + \vec{AC}) \\ &= \frac{3}{4} \vec{AB} + \frac{1}{4} \vec{AC} + 0 \cdot \vec{AD} \text{ d'ou } J \left(\frac{3}{4}, \frac{1}{4}, 0 \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} * \vec{AK} &= \vec{AC} + \vec{CK} = \vec{AC} + \frac{3}{8} \vec{CD} = \vec{AC} + \frac{3}{8} (\vec{CA} + \vec{AD}) \\ &= \frac{5}{8} \vec{AC} + \frac{3}{8} \vec{AD} \text{ d'ou } K \left(0, \frac{5}{8}, \frac{3}{8} \right). \end{aligned}$$

$$* \vec{AL} = \frac{1}{6} \vec{AC} + \frac{1}{6} \vec{AD} \text{ donc } L \left(0, \frac{1}{6}, \frac{1}{6} \right)$$

$$2) \vec{IL} \begin{pmatrix} 0 - \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} - 0 \\ \frac{1}{6} - 0 \end{pmatrix} \text{ d'ou } \vec{IL} \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} \end{pmatrix}; \vec{JK} \begin{pmatrix} 0 - \frac{3}{4} \\ \frac{5}{8} - \frac{1}{4} \\ \frac{3}{8} - 0 \end{pmatrix} \text{ d'ou } \vec{JK} \begin{pmatrix} -\frac{3}{4} \\ \frac{3}{8} \\ \frac{3}{8} \end{pmatrix}$$

on conclut que $\vec{IL} = \frac{4}{9} \vec{JK}$ donc $k = \frac{4}{9}$.

8 1) $\vec{AB} \begin{pmatrix} 2 - 1 \\ \frac{1}{3} - 0 \\ \frac{3}{2} - 2 \end{pmatrix} \text{ d'ou } \vec{AB} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}; \vec{AE} \begin{pmatrix} 3 - 1 \\ \frac{2}{2} - 0 \\ 1 - 2 \end{pmatrix} \text{ d'ou } \vec{AE} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

on remarque que $\vec{AE} = 2 \vec{AB}$ donc A, B et E sont alignés.

$$2) \vec{AB} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \text{ et } \vec{DC} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix};$$

on constate que $\vec{AB} = \vec{DC}$ ou encore ABCD est un parallélogramme.

3) Pour prouver que $F \in (ABC)$,

1^{ère} Méthode: il suffit de trouver x et y tel que $\vec{AF} = x \vec{AB} + y \vec{AC} (*)$. On a :

$$\vec{AF} \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ -13 \end{pmatrix}, \vec{AB} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}; \vec{AC} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

$$\text{La relation } (*) \text{ devient : } \begin{cases} 5 = x + 2y \\ 5 = x + 2y \\ -13 = -\frac{1}{2}x - \frac{9}{2}y \end{cases}$$

$$\text{Ou encore } \begin{cases} x + 2y = 5 \\ x + 9y = 26 \end{cases} \text{ soit } \begin{cases} x = -1 \\ y = 3 \end{cases}$$

Donc $F \in (ABC)$ et F (-1, 3) dans $(A, \vec{AB}, \vec{AC})$.

2^{ème} Méthode: il suffit démontrer que les vecteurs $\vec{AB}, \vec{AC}$ et $\vec{AF}$ sont linéairement dépendant:

$$\begin{vmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 5 & 1 & 2 \\ -13 & \frac{1}{2} & \frac{9}{2} \end{vmatrix} = 5 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 9 \\ \frac{1}{2} & \frac{9}{2} \end{vmatrix} - 5 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 9 \\ \frac{1}{2} & \frac{9}{2} \end{vmatrix} - 13 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = \frac{35}{2} - \frac{35}{2} - 0 = 0$$

Donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AF}$ sont linéairement dépendants d'où $F \in (ABC)$

9

$$1) \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = (\overrightarrow{GA'} + \overrightarrow{A'B}) + (\overrightarrow{GA'} + \overrightarrow{A'C}) + (\overrightarrow{GA'} + \overrightarrow{A'D})$$

$$= 3 \overrightarrow{GA'} + (\overrightarrow{A'B} + \overrightarrow{A'C} + \overrightarrow{A'D}) \text{ or } A' \text{ est le centre de gravité de } BCD. = 3 \overrightarrow{GA'}$$

$$2) \text{ On a } \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = \vec{0}$$

$$\text{ou encore } \overrightarrow{AG} = \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} \text{ or } \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} = 3 \overrightarrow{GA'}$$

D'où $\overrightarrow{AG} = 3 \overrightarrow{GA'}$ par suite G, A, A' alignés. Ou encore $G \in (AA')$.

$$\overrightarrow{AG} = 3 \overrightarrow{GA'} \Leftrightarrow \overrightarrow{AG} = 3 \overrightarrow{GA} + 3 \overrightarrow{AA'} \Leftrightarrow \overrightarrow{AG} = \frac{3}{4} \overrightarrow{AA'}$$

3) Par un raisonnement analogue, on prouverait les égalités :

$$\overrightarrow{BG} = \frac{3}{4} \overrightarrow{BB'}, \overrightarrow{CG} = \frac{3}{4} \overrightarrow{CC'} \text{ et } \overrightarrow{DG} = \frac{3}{4} \overrightarrow{DD'}$$

d'où G appartient aussi à (BB') ; (CC') et (DD') par suites les droites (AA') ; (BB') ; (CC') et (DD') sont concourantes en G.

$$4) a) \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} = (\overrightarrow{GI} + \overrightarrow{IA}) + (\overrightarrow{GI} + \overrightarrow{IB}) = 2 \overrightarrow{GI} + \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = 2 \overrightarrow{GI}$$

$$\text{Car } \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \vec{0} \Leftrightarrow I = A * B$$

$$\text{Par suite } \overrightarrow{GI} = \frac{1}{2} (\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB}) \text{ de même } \overrightarrow{GJ} = \frac{1}{2} (\overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD})$$

$$b) \overrightarrow{GI} + \overrightarrow{GJ} = \frac{1}{2} (\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD}) = \vec{0} \text{ équivaut à G est le milieu de } [IJ].$$

c) On démontrerait de même que G est le milieu de $[KL]$ et $[MN]$

Alors les droites (IJ) , (KL) et (MN) sont donc concourants en G.

d) On utilise :

$$\overrightarrow{GA'} = -\frac{1}{3} \overrightarrow{GA}, \overrightarrow{GB'} = -\frac{1}{3} \overrightarrow{GB}; \overrightarrow{GC'} = -\frac{1}{3} \overrightarrow{GC} \text{ et } \overrightarrow{GD'} = -\frac{1}{3} \overrightarrow{GD}$$

$$\text{d'où } \overrightarrow{GA'} + \overrightarrow{GB'} + \overrightarrow{GC'} + \overrightarrow{GD'} = -\frac{1}{3} (\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD}) = \vec{0}.$$

10

$$1) a) \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} \text{ or } \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}.$$

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} \text{ d'où } \overrightarrow{AD} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$$

donc D (-1, 1, 0).

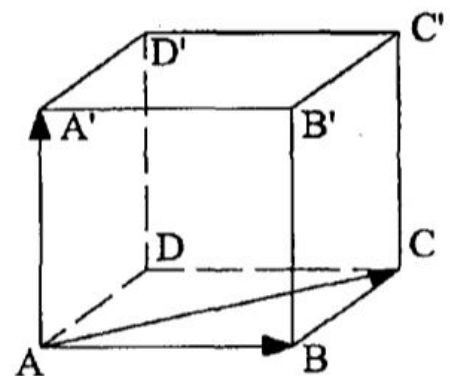
$$* \overrightarrow{AD'} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DD'} \text{ or } \overrightarrow{DD'} = \overrightarrow{AA'}$$

$$= (-\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) + \overrightarrow{AA'} \text{ d'où } D'(-1, 1, 1).$$

$$* \overrightarrow{AB'} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BB'}) = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AA'}$$

D'où B' (1, 0, 1).

$$* \overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AB'} + \overrightarrow{B'C'} \text{ or } \overrightarrow{B'C'} = \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$$



$$= \overrightarrow{AB'} + \overrightarrow{AD} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AA'}) + (-\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AA'} \text{ d'ou } C' (0, 1, 1).$$

b) On a C (0, 1, 0).

$$O = B' * C' \text{ donc } O \left(\frac{1+0}{2}, \frac{0+1}{2}, \frac{1+1}{2} \right). \text{ D'ou } O \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1 \right). \text{ par suite } \overrightarrow{OC} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ -1 \end{pmatrix}.$$

2)a) Pour prouver que $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont ils coplanaires il suffit de chercher a et b

$$\text{tel que : } \vec{w} = a \vec{u} + b \vec{v} . \text{ ou encore } \begin{cases} 1 = 2a + 2b \\ 1 = a - b \\ 3 = 0 \text{ impossible} \end{cases}$$

d'ou a et b n'existent pas par suite $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont non coplanaires.

$$b) \vec{u} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} ; \vec{v} = 2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} \text{ et } \vec{w} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + 3\overrightarrow{AA'}.$$

$$\text{On remarque que } \vec{u} + \vec{v} = 4\overrightarrow{AB} \text{ d'ou } \overrightarrow{AB} = \frac{1}{4}(\vec{u} + \vec{v}).$$

$$\overrightarrow{AC} = \vec{u} - 2\overrightarrow{AB} = \vec{u} - \frac{1}{2}(\vec{u} + \vec{v}) = \frac{1}{2}(\vec{u} - \vec{v}).$$

$$\vec{w} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + 3\overrightarrow{AA'} \text{ d'ou } 3\overrightarrow{AA'} = \vec{w} - \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}.$$

$$= \vec{w} - \frac{1}{4}(\vec{u} + \vec{v}) - \frac{1}{2}(\vec{u} - \vec{v}) = -\frac{3}{4}\vec{u} + \frac{1}{4}\vec{v} + \vec{w}.$$

$$\text{Ainsi } \overrightarrow{AA'} = -\frac{1}{4}\vec{u} + \frac{1}{12}\vec{v} + \frac{1}{3}\vec{w}.$$

$$\overrightarrow{AB} = \frac{1}{4}\vec{u} + \frac{1}{4}\vec{v} \text{ donc } B \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, 0 \right) \text{ dans } R'$$

$$\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\vec{u} - \frac{1}{2}\vec{v} \text{ donc } C \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0 \right) \text{ dans } R'.$$

$$\overrightarrow{AA'} = -\frac{1}{4}\vec{u} + \frac{1}{12}\vec{v} + \frac{1}{3}\vec{w} \text{ donc } A' \left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{12}, \frac{1}{3} \right) \text{ dans } R'.$$

$$\overrightarrow{OC} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AA'}$$

$$\overrightarrow{OC} = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\vec{u} + \frac{1}{4}\vec{v}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\vec{u} - \frac{1}{2}\vec{v}\right) + \frac{1}{4}\vec{u} - \frac{1}{12}\vec{v} - \frac{1}{3}\vec{w} = \frac{3}{8}\vec{u} - \frac{11}{24}\vec{v} - \frac{1}{3}\vec{w}$$

d'où $\overrightarrow{OC} \begin{pmatrix} 3/8 \\ -11/24 \\ -1/3 \end{pmatrix}$ dans la base $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$.



1) $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2} = \sqrt{1250} = 25\sqrt{2}$.

$AC = 25\sqrt{2} = AD = BC = BD = CD$.

On a donc $AB = AC = AD = BC = BD = CD$ on en déduit que ABCD est un tétraèdre régulier.

2) $\overrightarrow{GB} \begin{pmatrix} 37/3 \\ 35/3 \\ 34/3 \end{pmatrix}; \overrightarrow{GC} \begin{pmatrix} 13/3 \\ 10/3 \\ 59/3 \end{pmatrix}; \overrightarrow{GD} \begin{pmatrix} 50/3 \\ 25/3 \\ 25/3 \end{pmatrix}$

d'où $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, G est donc le centre de gravité du triangle BCD.

3) a) On pose $K(x, y, z); \overrightarrow{KA} \begin{pmatrix} -7-x \\ -15-y \\ 3-z \end{pmatrix}; \overrightarrow{KB} \begin{pmatrix} -4-x \\ 20-y \\ -1-z \end{pmatrix}; \overrightarrow{KC} \begin{pmatrix} 4-x \\ 5-y \\ 30-z \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{KD} \begin{pmatrix} 25-x \\ -y \\ 2-z \end{pmatrix}$.

$\overrightarrow{KA} + \overrightarrow{KB} + \overrightarrow{KC} + \overrightarrow{KD} = \vec{0}$.

$$\begin{cases} -7 - x - 4 - x + 4 - x + 25 - x = 0 \\ -15 - y + 20 - y + 5 - y - y = 0 \\ 3 - z - 1 - z + 30 - z + 2 - z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{9}{2} \\ y = \frac{5}{2} \\ z = \frac{17}{2} \end{cases} \text{ d'où } K\left(\frac{9}{2}, \frac{5}{2}, \frac{17}{2}\right).$$

b) On a $\overrightarrow{AG} \begin{pmatrix} 46/3 \\ 70/3 \\ 22/3 \end{pmatrix}; \overrightarrow{BD} \begin{pmatrix} 29 \\ -20 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\left(\frac{46}{3} \times 29\right) + \left(-\frac{70}{3} \times 20\right) + \left(\frac{22}{3} \times 3\right) = 0$.

Alors les vecteurs $\overrightarrow{AG}$ et $\overrightarrow{BD}$ sont orthogonaux par suite les droites (AG) et (BD) sont orthogonales.

$$c) \overrightarrow{AK} \begin{pmatrix} \frac{23}{2} \\ \frac{35}{2} \\ \frac{11}{2} \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{AG} \begin{pmatrix} \frac{46}{3} \\ \frac{70}{3} \\ \frac{22}{3} \end{pmatrix} \text{ on remarque que : } \begin{cases} \frac{23}{2} \times \frac{70}{3} - \frac{35}{2} \times \frac{46}{3} = 0 \\ \frac{23}{2} \times \frac{22}{3} - \frac{46}{3} \times \frac{11}{2} = 0 \\ \frac{35}{2} \times \frac{22}{3} - \frac{11}{2} \times \frac{70}{3} = 0 \end{cases}$$

donc $\overrightarrow{AK}$ et $\overrightarrow{AG}$ sont colinéaires par suite A, G et K sont alignés.

$$d) \overrightarrow{KA} + \overrightarrow{KB} + \overrightarrow{KC} + \overrightarrow{KD} = \vec{0}.$$

$$(\overrightarrow{KJ} + \overrightarrow{JA}) + (\overrightarrow{KJ} + \overrightarrow{JB}) + (\overrightarrow{KI} + \overrightarrow{IC}) + (\overrightarrow{KI} + \overrightarrow{ID}) = \vec{0}.$$

$$2\overrightarrow{KJ} + 2\overrightarrow{KI} + (\overrightarrow{JA} + \overrightarrow{JB}) + (\overrightarrow{IC} + \overrightarrow{ID}) = \vec{0}$$

$$\text{or } J = A * B \text{ et } I = D * C \text{ d'ou } 2\overrightarrow{KJ} + 2\overrightarrow{KI} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{KJ} + \overrightarrow{KI} = \vec{0}$$

$$(\overrightarrow{KI} + \overrightarrow{IJ}) + \overrightarrow{KI} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{IJ} = 2\overrightarrow{IK} \text{ par suite } \overrightarrow{IJ} \text{ et } \overrightarrow{IK} \text{ sont colinéaires.}$$

$$\nabla 12/1) a) * \overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{EH} + \overrightarrow{AE} \text{ or } \overrightarrow{EH} = \overrightarrow{AD}$$

$$= \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} \text{ d'ou } I \left(0, \frac{1}{2}, 1\right).$$

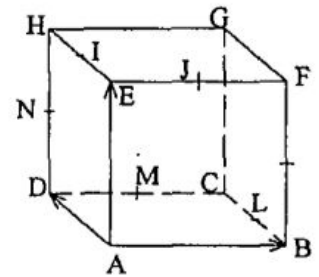
$$* \overrightarrow{AJ} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EJ} = \overrightarrow{AE} + \frac{1}{2}\overrightarrow{EF}$$

$$= \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE} \text{ d'ou } J \left(\frac{1}{2}, 0, 1\right).$$

$$* \overrightarrow{AK} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BK} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BF} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AE} \text{ d'ou } K \left(1, 0, \frac{1}{2}\right)$$

$$* \overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} \text{ d'ou } G (1, 1, 1).$$

$$\overrightarrow{IJ} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}; \overrightarrow{JK} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}; \overrightarrow{AG} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$



b) Vérifions l'orthogonalité de $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{AG}$; $\overrightarrow{JK}$ et $\overrightarrow{AG}$.

$$\left(\frac{1}{2} \times 1\right) + \left(-\frac{1}{2} \times 1\right) + (0 \times 1) = 0 \text{ et } \left(\frac{1}{2} \times 1\right) + (0 \times 1) + \left(-\frac{1}{2} \times 1\right) = 0$$

donc $\overrightarrow{AG}$ est orthogonal à $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{JK}$. D'ou (AG) est orthogonale à deux droites sécantes (IJ) et (JK) par suite (AG) est orthogonale au plan (IJK) = P.

$$2) a) \overrightarrow{AL} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BL} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} \text{ d'ou } L \left(1, \frac{1}{2}, 0\right).$$

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} \text{ d'ou } M \left(\frac{1}{2}, 1, 0\right)$$

$$\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DN} = \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AE} \text{ d'ou } N\left(0, 1, \frac{1}{2}\right).$$

$$\text{Or } I\left(0, \frac{1}{2}, 1\right) \text{ d'ou } \overrightarrow{IL} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}; \overrightarrow{IM} \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ -1 \end{pmatrix}; \overrightarrow{IN} \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}.$$

$$b) * \overrightarrow{IL} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}; \overrightarrow{AG} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; (1 \times 1) + (0 \times 1) + (-1 \times 1) = 0 \text{ donc } \overrightarrow{IL} \text{ est orthogonal à } \overrightarrow{AG}.$$

$$* \overrightarrow{IM} \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ -1 \end{pmatrix}; \overrightarrow{AG} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \left(\frac{1}{2} \times 1\right) + \left(\frac{1}{2} \times 1\right) + (-1 \times 1) = 0 \text{ donc } \overrightarrow{IM} \text{ et } \overrightarrow{AG} \text{ sont orthogonaux.}$$

$$* \overrightarrow{IN} \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}; \overrightarrow{AG} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; (0 \times 1) + \left(\frac{1}{2} \times 1\right) + \left(-\frac{1}{2} \times 1\right) = 0 \text{ donc } \overrightarrow{IN} \text{ et } \overrightarrow{AG} \text{ sont orthogonaux.}$$

Les points M, N et L appartiennent au plan perpendiculaire à la droite (AG) et passant par I c'est à dire le plan P.

$$3) a) O \text{ le centre de cube ou encore } \overrightarrow{AO} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AG} \text{ d'ou } O\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right).$$

$$\overrightarrow{IO} \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{AG} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ donc } \left(\frac{1}{2} \times 1\right) + \left(\frac{1}{2} \times 1\right) + \left(\frac{1}{2} \times 1\right) = 0 \text{ d'ou } O \text{ appartient au plan P.}$$

b) Montrons que les points I, J, K, L, M et N appartiennent à un même cercle de centre O.

On calcule les distances OI, OJ, OK, OL, OM et ON à partir des coordonnées.

$$OI = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{2} = OJ = OK = OL = OM = ON \text{ d'ou I, J, L, K, M et N}$$

appartiennent au cercle de centre O de rayon $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Montrons que $IJ = JK = KL = LM = MN = NI$.

Comme les points I, J, K, L, M et N sont les milieux des arêtes, les distances IJ, JK, KL, LM, MN, et NI sont toutes égales à la moitié de la mesure d'une

diagonale d'une face c'est à dire $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Ceci prouve que l'hexagone IJKLMN est régulier de côté $\frac{\sqrt{2}}{2}$.