



RESUME DU COURS

Définition : Soit O un point du plan et $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs. On désigne par A et B les points tels que $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$. On appelle produit scalaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et on note $\vec{u} \cdot \vec{v}$, le réel ainsi défini
 $\vec{u} \cdot \vec{v} = OA \cdot OB \cdot \cos AOB$, si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non nuls. * $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$, si $\vec{u}$ ou $\vec{v}$ est nul.

Conséquence : Pour tout vecteur $\vec{u}$, $\vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2$.

Propriétés : Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$. Pour tout vecteur $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et pour tout réels α et β ,
 $(\alpha \cdot \vec{u}) \cdot \vec{v} = \alpha(\vec{u} \cdot \vec{v})$, $\vec{u} \cdot (\alpha \vec{v}) = \alpha(\vec{u} \cdot \vec{v})$, $(\alpha \cdot \vec{u}) \cdot (\beta \cdot \vec{v}) = \alpha\beta(\vec{u} \cdot \vec{v})$

Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, on a :

$$\|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v}; \|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v}; \|\vec{u} + \vec{v}\|^2 + \|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = 2(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2).$$

Pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$, $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$.

Définition : Deux vecteurs sont dits orthogonaux si leur produit scalaire est nul et on note $\vec{u} \perp \vec{v}$.

Conséquence : Deux droites sont perpendiculaires, si et seulement si, le produit scalaire de leurs vecteurs directeurs est nul.

Propriété : * Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nul et O, A et B des points tels que $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$. Si H est le projeté orthogonal de B sur la droite (AO) , alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OH}$.

* Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nul et A, B et C des points tels que $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$; $\vec{v} = \overrightarrow{BC}$, H le projeté de B sur (OA) et K le projeté de C sur (OA) , alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{HK}$.

Propriété : Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, $|\vec{u} \cdot \vec{v}| \leq \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$ (Inégalité de Cauchy – Schwarz)

$|\vec{u} \cdot \vec{v}| = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$, si et seulement si, les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

Théorème : Soit $(\vec{i}, \vec{j})$ une base orthonormée de l'ensemble des vecteurs du plan.

Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de composantes respectives (x, y) et (x', y') , $\vec{u} \cdot \vec{v} = x x' + y y'$.