



RESUME DU COURS

Théorème et définition : Il existe un ensemble appelé ensemble des nombres complexes, noté $\mathbb{C}$ et vérifiant les propriétés suivantes :

- 1) l'ensemble $\mathbb{C}$ contient l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$.
- 2) il existe un élément de $\mathbb{C}$, noté i , tel que $i^2 = -1$.
- 3) l'ensemble $\mathbb{C}$ est muni d'une addition et d'une multiplication qui vérifient les mêmes propriétés que l'addition et la multiplication dans $\mathbb{R}$.
- 4) tout élément de $\mathbb{C}$ s'écrit de façon unique sous la forme $z = a + ib$, où a et b sont des réels.

Théorème : Soit $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$ (a, b, a', b' sont des réels). Alors :

$$* z = z' \Rightarrow a = a' \text{ et } b = b'$$

$$* z = 0 \Rightarrow a = b = 0$$

$$* z \text{ est réel} \Rightarrow b = 0$$

$$* z \text{ est imaginaire} \Rightarrow a = 0$$

Propriétés : Pour tous nombres complexes z et z' , $\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$; $\overline{zz'} = \overline{z}\overline{z'}$; $\overline{(z^n)} = (\overline{z})^n$; $n \in \mathbb{N}^*$

Pour tous nombres complexes z et tous nombres complexes z' non nul, $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{z'}}$; $\overline{\left(\frac{1}{z^n}\right)} = \frac{1}{(\overline{z'})^n}$; $n \in \mathbb{Z}$

$$z + \overline{z} = 2\operatorname{Re}(z) ; z - \overline{z} = 2i\operatorname{Im}(z) ; z\overline{z} = (\operatorname{Re}(z))^2 + (\operatorname{Im}(z))^2$$

$$z = \overline{z}, \text{ si et seulement si } z \text{ est réel}$$

$$z = -\overline{z}, \text{ si et seulement si } z \text{ est imaginaire}$$

théorème : Soit deux nombres complexes z et z' . $|z| = 0$, si et seulement si, $z = 0$; $|z + z'| \leq |z| + |z'|$;

$$|kz| = |k||z| ; k \in \mathbb{R} ; |zz'| \leq |z||z'| ; |\overline{z}| = |z| ; |z|^2 = z\overline{z} ; |z^n| = |z|^n ; n \in \mathbb{N}^* ; \left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}, z \neq 0 ;$$

$$\left|\frac{z'}{z}\right| = \frac{|z'|}{|z|}, z \neq 0 ; \left|\frac{1}{z^n}\right| = \frac{1}{|z|^n}, z \neq 0 \text{ et } n \in \mathbb{Z}$$

Propriétés : Soit z un nombre complexe non nul et k un réel non nul. $\arg(\overline{z}) = -\arg(z) + 2k\pi$;

$$\arg(-z) = \pi + \arg(z) + 2k\pi$$

$$\text{Si } k > 0 \text{ alors } \arg(kz) = \arg(z) + 2k\pi ; \text{ si } k < 0 \text{ alors } \arg(kz) = \pi + \arg(z) + 2k\pi$$

Théorème : Soit z un nombre complexe non nul tel que $\arg(z) = \theta + 2k\pi$. Alors $z = |z|(\cos \theta + i \sin \theta)$. Cette écriture est appelée écriture trigonométrique de z .

Si M est l'image de z dans un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$ alors M appartient au cercle de centre O et de rayon $|z|$ et à la demi droite $[OB)$ telle que $\widehat{(\vec{u}; \overrightarrow{OB})} = \theta + 2k\pi$

Théorème : Soit z un nombre complexe non nul tel que $z = a + ib$; a et $b \in \mathbb{R}$. Alors $\arg(z) = \theta + 2k\pi$, si seulement si, $\cos \theta = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ et $\sin \theta = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

Propriétés : Soit deux nombres complexes non nul z et z' .

$$\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z') + 2k\pi ; \arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\arg(z) + 2k\pi ; \arg\left(\frac{z'}{z}\right) = \arg(z') - \arg(z) + 2k\pi ;$$

$\arg(z^n) = n \arg(z) + 2k\pi, n \in \mathbb{Z}$. Pour tout nombre complexe non nul z , $z^n = |z|^n (\cos \theta + i \sin \theta)$, la formule précédente est appelée formule de Moivre.

Théorème : Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. Soit A, B, C et D les points d'affixes respectives tels que $AB \neq 0$ et $CD \neq 0$. Alors

$$(\vec{u}; \widehat{AB}) = \arg(z_B - z_A) + 2k\pi \text{ et } (\widehat{AB}; \widehat{CD}) = \arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right) + 2k\pi$$

$$\textbf{Théorème} : \frac{z_D - z_C}{z_B - z_A} = \frac{CD}{AB} (\cos \theta + i \sin \theta) \text{ avec } (\widehat{AB}; \widehat{CD}) = \theta + 2k\pi$$

Théorème : Soit a, b et c des nombres complexes tels que $a \neq 0$. L'équation $az^2 + bz + c = 0$ admet dans $\mathbb{C}$, deux solutions (éventuellement confondues) définies par : $z_1 = \frac{-b + \delta}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b - \delta}{2a}$ où δ est une racine carrée du discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$.

Théorème : Si z_1 et z_2 sont les solutions de l'équation $az^2 + bz + c = 0$, $a \neq 0$; alors

$$az^2 + bz + c = a(z - z_1)(z - z_2) ; z_1 + z_2 = -\frac{b}{a} \text{ et } z_1 z_2 = \frac{c}{a}$$