



RESUME DU COURS

Définition : Lorsque deux bipoints $(A; B)$ et $(C; D)$ sont tels que $[AC]$ et $[BD]$ ont le même milieu. Alors ces bipoints représentent un même vecteur de l'espace, noté $\overrightarrow{AB}$ ou $\overrightarrow{DC}$.

Les bipoints $(M; M)$ où M est un point quelconque de l'espace représentent le vecteur nul, noté $\vec{0}$.

L'ensemble des vecteurs de l'espace est noté $\mathcal{W}$.

Conséquence : Soit A, B, C et D quatre points de l'espace tel que A, B et C ne soient pas alignés. Alors $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, si et seulement si, $ABCD$ est un parallélogramme.

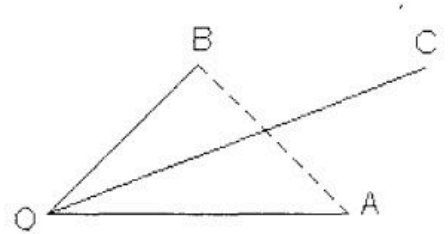
Définition : On appelle norme d'un vecteur $\vec{u}$ et on note $\|\vec{u}\|$, le réel positif défini par $\|\vec{u}\| = AB$ où A et B sont deux points quelconques tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$.

Théorème : Soit O un point de l'espace. Pour tout vecteur $\vec{u}$ de $\mathcal{W}$ il existe un unique point M de ξ tel que $\overrightarrow{OM} = \vec{u}$.

Définition : Soient O un point de ξ , $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de $\mathcal{W}$.

Soit A, B et C les points de ξ tels que $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$;

$\vec{v} = \overrightarrow{OB}$ et $[OC]$ et $[AB]$ ont le même milieu. On appelle vecteur somme de $\vec{u}$ et $\vec{v}$, le vecteur $\vec{w} = \overrightarrow{OC}$. On note $\vec{u} + \vec{v} = \vec{w}$.



Conséquence : Pour tous points A, B et C de ξ ,

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ (Relation de Chasles). Soit A, B, C et D quatre points de ξ tels que A, B et C ne sont pas alignés. Alors $ABCD$ est un parallélogramme, si et seulement si, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$.

Propriétés : Pour tous vecteurs $\vec{u}; \vec{v}$ et $\vec{w}$ de $\mathcal{W}$: $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$; $\vec{u} + \vec{0} = \vec{u}$; $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$.

Pour tout vecteur $\vec{u}$ de l'espace, il existe un unique vecteur $\vec{v}$ de l'espace tel que : $\vec{u} + \vec{v} = \vec{0}$, le vecteur $\vec{v}$ tel que $\vec{u} + \vec{v} = \vec{0}$ s'appelle vecteur opposé de $\vec{u}$ et se note $-\vec{u}$.

Définition : Soient $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de $\mathcal{W}$.

On dit que $\vec{w}$ est une combinaison linéaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$, s'il existe deux réels α et β tels que : $\vec{w} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$. Lorsque l'un des vecteurs $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$ est une combinaison linéaire des deux autres.

On dit que les vecteurs $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$ sont linéairement dépendants ou encore que la famille $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$.

Théorème : Soit A un point de l'espace et $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non colinéaires.

L'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM}$ soit combinaison linéaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est un plan, appelé plan passant par A et de vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$. Un point M appartenant au plan $P(A, \vec{u}, \vec{v})$, si et seulement si, il existe un unique couple de réels $(x; y)$ tel que : $\overrightarrow{AM} = x\vec{u} + y\vec{v}$.

Conséquence : Soient O, A, B et C quatre points de ξ . O, A, B et D sont coplanaires, si et seulement si, la famille $\{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}\}$ est liée.

Propriété : Soient A et B deux points distincts de ξ et trois vecteurs non nuls $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$ tels que :

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ soient colinéaires. Alors la droite $D(A, \vec{u})$ est parallèle au plan $P(B, \vec{v}, \vec{w})$, si et seulement si, la famille $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ est liée.

Propriété : Soient A et B deux points distincts de ξ et $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non colinéaires $\vec{u}'$ et $\vec{v}'$ deux vecteurs non colinéaires. Alors : $P(A, \vec{u}, \vec{v})$ et $P'(B, \vec{u}', \vec{v}')$ sont parallèles, si et seulement si, $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{u}'\}$ et $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{v}'\}$ sont liées.

Définition : Soient $\vec{i}, \vec{j}$ et $\vec{k}$ trois vecteurs de $\mathbf{W}$. Le triplet $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est une base de $\mathbf{W}$, si et seulement si, la famille $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ n'est pas liée. Soit O un point de $\mathbf{W}$. On dit que $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est un repère cartésien de ξ si $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est une base de $\mathbf{W}$.

Conséquence : Soient A, B, C et D quatre points de ξ . Le triplet $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$ est une base de $\mathbf{W}$, si et seulement si, les points A, B, C et D ne sont pas coplanaires.

Théorème : Soit O un point de ξ et $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ une base de $\mathbf{W}$.

Pour tout vecteur $\vec{u}$ de $\mathbf{W}$ il existe un unique triplet (x, y, z) de réels tel que : $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.

Le triplet (x, y, z) de réels s'appelle le triplet de composantes du vecteurs $\vec{u}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ et on

note $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. Pour tout M de l'espace ξ il existe un unique triplet (x, y, z) de réels tel

que : $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$. Le triplet (x, y, z) de réels s'appelle le triplet de coordonnées du point M dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

Théorème : Soit $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ une base de $\mathbf{W}$. soit $\vec{u} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \vec{v} \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$ deux vecteurs de $\mathbf{W}$, α et β deux réels.

Les composantes de $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ sont $\begin{pmatrix} \alpha a + \beta a' \\ \alpha b + \beta b' \\ \alpha c + \beta c' \end{pmatrix}$.

Définition : Soit $\mathbf{B} = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ une base de $\mathbf{W}$ et $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ un triplet de vecteurs de $\mathbf{W}$ tels

que : $\vec{u} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}, \vec{v} \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$ et $\vec{w} \begin{pmatrix} a'' \\ b'' \\ c'' \end{pmatrix}$. On appelle déterminant de $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ dans la base B, et noté

$$\text{dét}_{\mathbf{B}}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \begin{vmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{vmatrix} \text{ le réel } a(b'c'' - c'b'') - b(a'c'' - c'a'') + c(a'b'' - b'a'').$$