

Les Filtres électriques

1- Généralités :

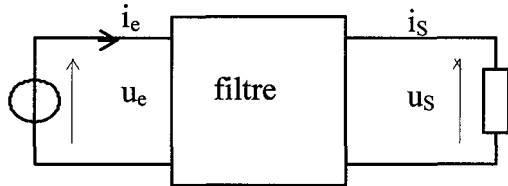
- Un *filtre* électronique est un *quadripôle* linéaire qui ne transmet que les signaux dont la fréquence est dans un domaine bien précis, les autres sont éliminées

u_e : tension d'entrée

u_s : tension de sortie

i_e : courant d'entrée

i_s : courant de sortie



- Le filtrage est une opération de tri des signaux électriques selon leurs fréquences.

- On appelle fonction de transfert ou transmittance d'un filtre et on la note T le

rapport $\frac{U_{sm}}{U_{sm}}$.

$$T = \frac{U_{sm}}{U_{sm}} \text{ (} T \text{ est sans unité) .}$$

- On définit aussi pour un filtre une grandeur caractéristique notée G appelé gain lié à T par la relation $G = 20 \log T$ (G s'exprime en décibel (dB))

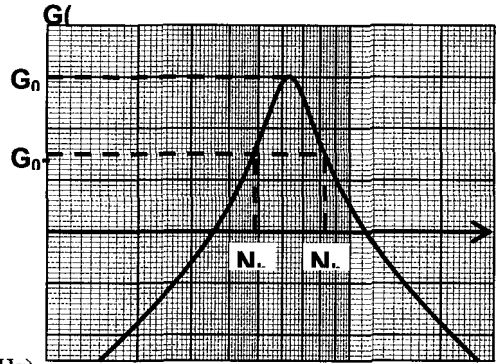
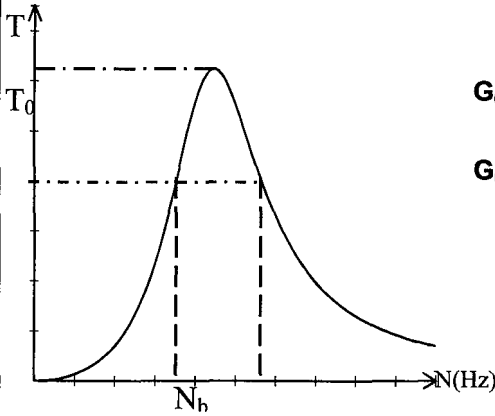
➤ G est une grandeur algébrique ;

- Si $T > 1$ alors $G > 0$: le filtrage s'accompagne d'une amplification d'amplitude.

- Si $T < 1$; $G < 0$: le filtrage s'accompagne d'une atténuation d'amplitude.

- On appelle courbe de réponse d'un filtre la courbe de variation $T = f(N)$ ou $G = f(N)$

- Généralement, le domaine dans lequel le filtre doit agir étant assez important, on utilise pour les fréquences une échelle logarithmique. Ce choix permet de condenser les résultats mais aussi de ne laisser aucun domaine dans l'oubli, ce qu'une échelle linéaire ne permettrait pas (on parle ainsi de courbe tracée dans un quadrillage semi logarithmique

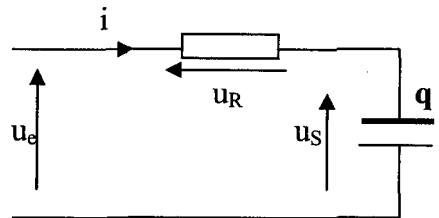


- La transmittance passe par un maximum T_0 qui lui correspond un gain maximal G_0 .
- Le filtre est passant (signal d'entrée transmis en sortie) lorsque sa transmittance est $T \geq \frac{T_0}{\sqrt{2}}$ donc lorsque son gain $G \geq G_0 - 3 \text{ dB}$
- On appelle bande passante d'un filtre l'intervalle de fréquences $[N_b, N_h]$ pour lequel on a $T \geq \frac{T_0}{\sqrt{2}}$ donc lorsque $G \geq G_0 - 3 \text{ dB}$
- N_h et N_b sont appelées les fréquences de coupure haute et basse du filtre.
- La largeur de la bande passante est donnée par la différence $N_h - N_b$ des fréquences de coupures. ($N_h > N_b$)
- Plus la bande passante est étroite plus le filtre est dit sélectif

2- Exemples de filtres :

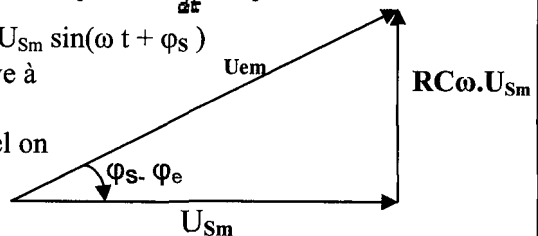
a- Filtre passe bas passif :

- Un filtre passif n'est formé que de dipôles passifs
- Un filtre passe bas passif est un circuit RC
- La tension de sortie u_s du filtre est toujours en retard de phase par rapport à la tension d'entrée.
- L'équation différentielle du filtre est : $u_e = R.C \frac{du_s}{dt} + u_s$



avec $u_e = U_{em} \sin(\omega t + \varphi_e)$ et $u_s = U_{sm} \sin(\omega t + \varphi_s)$

- La construction de Fresnel relative à cette équation différentielle est :
- D'après la construction de Fresnel on



peut écrire $U_{sm} = \frac{U_m}{\sqrt{1 + (RC \omega)^2}}$

- La transmittance du filtre est

$$T = \frac{U_{sm}}{U_m} = \frac{1}{\sqrt{1 + (RC \omega)^2}}$$

- La transmittance maximale $T_0 = 1$

- La transmittance du filtre $T < 1$ pour toute valeur de ω

- Le gain du filtre est $G = 20 \log T =$

$$G = 20 \log \frac{1}{\sqrt{1 + (RC \omega)^2}} = -20 \log \sqrt{1 + (RC \omega)^2}$$

- $G = -10 \log [1 + (RC \omega)^2]$

- On constate que $G < 0$ pour toute valeur de ω

- Les fréquences pour lesquelles le filtre est passant sont tel que $G \geq -3$ dB

- $-10 \log [1 + (RC \omega)^2] \geq -3$

- $1 + (RC \omega)^2 \leq 10^{0.3} = 2$ donc $RC \omega \leq 1$ d'où $N \leq \frac{1}{2\pi RC}$

- $N_c = \frac{1}{2\pi RC}$ est la fréquence de coupure du filtre

- La bande passante du filtre est $[0 ;$

$$\frac{1}{2\pi RC}]$$

b- Filtre passe bas actif :

- Un filtre actif contient au moins un élément actif.

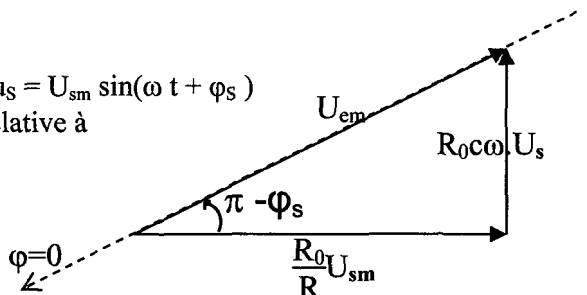
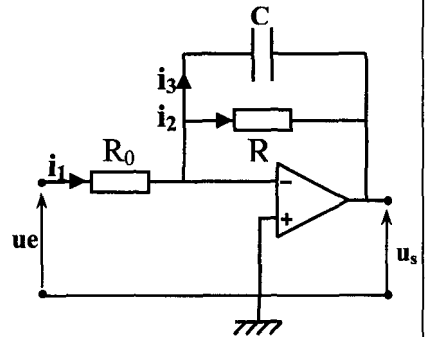
- l'équation différentielle en u_s relative au filtre s'écrit :

$$-u_e = \frac{R_0}{R} \cdot u_s + R_0 \cdot C \frac{du_s}{dt}$$

avec $u_e = U_{em} \sin(\omega t + \varphi_e)$ et $u_s = U_{sm} \sin(\omega t + \varphi_s)$

- La construction de Fresnel relative à

- cette équation différentielle



- La tension maximale U_{sm} s'écrit $U_{sm} = \frac{U_m}{\frac{R_0}{R} \cdot \sqrt{1 + (R.C.\omega)^2}}$

- La transmittance du filtre est

$$T = \frac{U_{sm}}{U_{em}} = \frac{\frac{R}{R_0}}{\sqrt{1 + (R.C.\omega)^2}} = \frac{T_0}{\sqrt{1 + (R.C.\omega)^2}}$$

- La valeur maximale de la transmittance est $T_0 = \frac{R}{R_0}$
- Le gain du filtre est $G = 20\log T = G_0 - 10.\log[1+(RC\omega)^2]$

avec $G_0 = 20.\log T_0 = 20 \log \frac{R}{R_0}$: gain maximal du filtre.

- Remarque :

- Si $R > R_0$ alors $T_0 > 1$ et $G_0 > 0$. Le signal filtré est amplifié.
- Si $R = R_0$ alors $T_0 = 1$ et $G_0 = 0$.
- Si $R < R_0$ alors $T_0 < 1$ et $G_0 < 0$. Le signal filtré est atténué.

- La bande passante du filtre est telle que : $G \geq G_0 - 3$ dB

$$\Rightarrow G_0 - 10.\log[1+(RC\omega)^2] \geq G_0 - 3 \text{ dB}$$

$$\Rightarrow -10 \log [1+(RC\omega)^2] \geq -3$$

$$\Rightarrow 1+(RC\omega)^2 \leq 10^{0.3} = 2 \text{ donc } RC\omega \leq 1 \text{ d'où } N \leq \frac{1}{2\pi RC}$$

$$\Rightarrow N_c = \frac{1}{2\pi RC} \text{ est la fréquence de coupure du filtre}$$

$$\Rightarrow \text{La bande passante du filtre est } [0 ; \frac{1}{2\pi RC}]$$

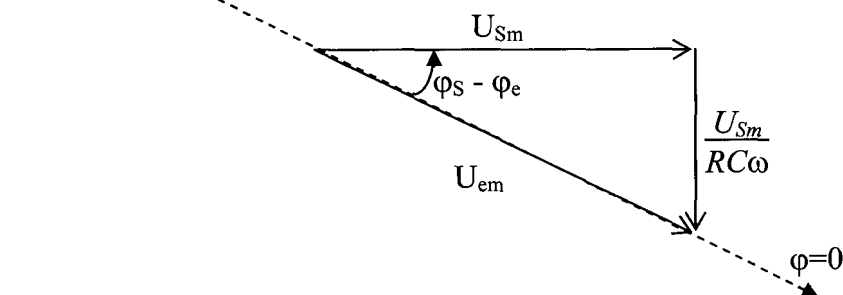
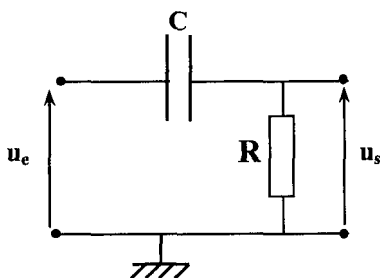
Remarque :

$$N_c = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot R \cdot C} \quad \text{alors} \quad R = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot N_c \cdot C} = Z_C. \text{ Donc à la fréquence}$$

de coupure on a pour les 2 filtres passif et actif $R = Z_C$: c'est donc la fréquence à laquelle les impédances du résistor et du condensateur sont égales

c- Filtre passe haut passif :

- Le filtre n'est formé que de dipôles passifs
- Un filtre passe haut passif est un circuit CR.
- La tension de sortie u_s du filtre est toujours en avance de phase par rapport à la tension d'entrée.
- L'équation différentielle relative à u_s s'écrit



$$u_e = \frac{1}{RC} \int u_s dt + u_s \quad \text{avec} \quad u_e = U_{em} \sin(\omega t + \varphi_e) \quad \text{et} \quad u_s = U_{sm} \sin(\omega t + \varphi_s)$$

- La construction de Fresnel relative à cette équation différentielle
- La tension maximale s'écrit:

$$U_{sm} = \frac{U_m}{\sqrt{1 + \frac{1}{(RC\omega)^2}}}$$

La transmittance du filtre est $T = \frac{U_{sm}}{U_{em}}$ ce qui donne $T = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{(RC\omega)^2}}}$

- La transmittance maximale $T_0 = 1$
- La transmittance du filtre $T < 1$ pour toute valeur de ω
- Le gain du filtre est

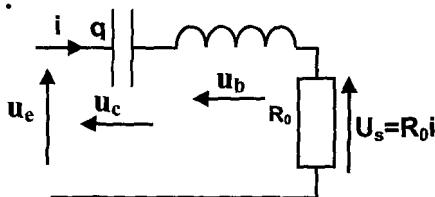
$$G = 20 \log T = 20 \log \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{(RC\omega)^2}}} = -10 \log \left[1 + \frac{1}{(RC\omega)^2} \right]$$

- On constate que $G < 0$ pour toute valeur de ω
- Les fréquences pour lesquelles le filtre est passant sont tel que $G \geq -3$ dB
- $-10 \log \left[1 + \frac{1}{(RC\omega)^2} \right] \geq -3 \Rightarrow \log \left[1 + \frac{1}{(RC\omega)^2} \right] \leq 0,3 \Rightarrow \left[1 + \frac{1}{(RC\omega)^2} \right] \leq 10^{0,3} = 2$
- $(RC\omega)^2 \geq 1 \Rightarrow RC\omega \geq 1 \Rightarrow N \geq \frac{1}{2\pi RC} = N_c$

fréquence de coupure basse

- La bande passante du filtre est $\left[\frac{1}{2\pi RC}; \infty \right[$

d- Filtre passe bande :



- L'équation différentielle relative à u_s s'écrit :

$$u_e = \left(1 + \frac{r}{R_0}\right) u_s + \frac{L}{R_0} \frac{du_s}{dt} + \frac{1}{CR_0} \int u_s dt$$

avec $u_e = U_{em} \sin(\omega t + \varphi_e)$ et $u_s = U_{sm} \sin(\omega t + \varphi_s)$

- La construction de Fresnel relative à cette équation différentielle
- Pour $R = R_0 + r$:

$$\left(\frac{U_{sm}}{U_{em}} \right)^2 = \frac{1}{\left(\frac{R}{R_0} \right)^2 + \left(\frac{L\omega}{R_0} - \frac{1}{R_0 C\omega} \right)^2} = \frac{1}{\left(\frac{R}{R_0} \right)^2 \left[1 + \left(\frac{L\omega}{R} - \frac{1}{RC\omega} \right)^2 \right]} \frac{L\omega}{R}$$

- La transmittance T du filtre est

$$T = \frac{\frac{R_0}{R}}{\sqrt{1 + \left(\frac{L\omega}{R} - \frac{1}{RC\omega}\right)^2}} = \frac{T_0}{\sqrt{1 + \left(\frac{L\omega}{R} - \frac{1}{RC\omega}\right)^2}} \text{ avec } T_0 = \frac{R_0}{R}.$$

- Remarque :

➤ $U_{sm} = R_0 I_m \Rightarrow U_{sm0} = R_0 I_{m0}$ (Obtenue à la résonance d'intensité)

➤ $U_{sm0} = R_0 \frac{U_{em}}{R} = \frac{R_0}{R} U_{em} \Rightarrow T_0 = \frac{U_{sm0}}{U_{em}} = \frac{R_0}{R}$

➤ $T_0 \leq 1$ ($T_0 = 1$ si $R = R_0$ c'est-à-dire $r = 0$)

➤ T_0 est obtenue pour $N = N_0$

Le gain du filtre est $G = 20 \log T = 20 \log \frac{T_0}{\sqrt{1 + \left(\frac{L\omega}{R} - \frac{1}{RC\omega}\right)^2}}$

$$G = 20 \log T_0 - 10 \log \left[1 + \left(\frac{L\omega}{R} - \frac{1}{RC\omega} \right)^2 \right].$$

- Remarque :

Si on pose $x = \frac{\omega}{\omega_0} = \frac{f}{f_0}$ et $Q = \frac{b\omega_0}{R} = \frac{1}{RC\omega_0}$: facteur de surtension à la résonance ;

alors on peut écrire :

➤ $T = \frac{T_0}{\sqrt{1 + Q^2 \left(x - \frac{1}{x}\right)^2}}$

➤ $G = 20 \cdot \log T = 20 \cdot \log \frac{T_0}{\sqrt{1 + Q^2 \left(x - \frac{1}{x}\right)^2}}$

- La bande passante est telle que $G \geq G_0 - 3 \text{ dB}$

➤ $20 \cdot \log \frac{T_0}{\sqrt{1 + Q^2 \left(x - \frac{1}{x}\right)^2}} \geq G_0 - 3 \text{ dB}$ or $G_0 = 20 \cdot \log T_0$

d'où $\log \left[1 + Q^2 \left(x - \frac{1}{x}\right)^2 \right] \leq 0,3$

➤ Ce qui donne $\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 \leq \frac{1}{Q^2} \Leftrightarrow -\frac{1}{Q} \leq x - \frac{1}{x} \leq \frac{1}{Q}$

➤ La résolution de l'inéquation $-\frac{1}{Q} \leq x - \frac{1}{x}$ qui s'écrit : $x^2 + \frac{x}{Q} - 1 \geq 0$

donne $x \geq \frac{1}{2Q} [-1 + \sqrt{1 + 4Q^2}] = x_b$

➤ La résolution de l'inéquation $x - \frac{1}{x} \leq \frac{1}{Q}$ qui s'écrit : $x^2 - \frac{x}{Q} - 1 \leq 0$ donne

$x \leq \frac{1}{2Q} [1 + \sqrt{1 + 4Q^2}] = x_h$

➤ On a ainsi $x_b \leq x \leq x_h$

➤ En tenant compte de $x = \frac{\omega}{\omega_0} = \frac{f}{f_0} \Leftrightarrow N = N_0 \cdot x \Leftrightarrow N_b \leq N \leq N_h$

avec $N_b = \frac{N_p}{2Q} [-1 + \sqrt{1+4Q^2}]$ fréquence de coupure basse

et $N_h = \frac{N_p}{2Q} [1 + \sqrt{1+4Q^2}]$ fréquence de coupure haute

➤ La largeur de la bande passante du filtre est $\Delta N = N_h - N_b = \frac{N_p}{Q}$

➤ Q est appelé aussi facteur de qualité .Il renseigne sur la sélectivité du filtre. Un filtre n'est sélectif que si Q est nettement supérieur à 1.

➤ Un filtre passe bande est d'autant sélectif que ΔN est plus petite devant N_0 , donc que $\frac{N_0}{\Delta N}$ est grand.

➤ La qualité d'un filtre augmente avec ce rapport, elle est d'autant meilleure que $\frac{Lw_0}{R}$ est grand et R est faible.

