

Suites arithmétiques Suites géométriques

I - Suites réelles

1) Définition:

Soit I une partie de $\mathbb{N}$, on appelle **suite réelle** toute application :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{U} : I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ n & \longmapsto & \mathcal{U}(n) \end{array}$$

Le réel $\mathcal{U}(n)$ est noté $\mathcal{U}_n$ ($\mathcal{U}$ indice n)

$\mathcal{U}_n$ s'appelle **le terme général** de la suite $\mathcal{U}$.

2) Exemples:

Exp 1:

Soit $\mathcal{U}_n = 2n - 1$

1) Calculer $\mathcal{U}_0$, $\mathcal{U}_1$, $\mathcal{U}_2$ et $\mathcal{U}_3$

2) Exprimer $\mathcal{U}_{2p}$ et $\mathcal{U}_{p+1}$ en fonction de p .

Solution:

$$1) \quad \mathcal{U}_0 = 2 \times 0 - 1 = -1 \quad ; \quad \mathcal{U}_2 = 2 \times 2 - 1 = 3$$

$$\mathcal{U}_1 = 2 \times 1 - 1 = 1 \quad ; \quad \mathcal{U}_3 = 2 \times 3 - 1 = 5$$

$$2) \quad 2l_{2p} = 2(2p) - 1 = 4p - 1$$

$$2l_{p+1} = 2(p+1) - 1 = 2p + 2 - 1 = 2p + 1$$

Remarque:

- ✦ $2l_0$: Le premier terme de la suite $2l$.
- ✦ $2l_1$: Le 2^e terme de la suite $2l$.
- ✦ $2l_2$: Le 3^e terme de la suite $2l$.

Exp 2:

Soit $v_n = \frac{1}{n}$

- 1) Calculer les 3 premiers termes de v .
- 2) Exprimer v_{2p+1} en fonction de p

Solution:

1) Rq: v_0 n'existe pas

$$v_1 = \frac{1}{1} = 1 ; v_2 = \frac{1}{2} \text{ et } v_3 = \frac{1}{3}$$

$$2) \quad v_{2p+1} = \frac{1}{2p+1}$$

Exp 3:

Soit la suite w_n définie sur $\mathbb{N}^*$

par : $w_n = 1 + 2 + 3 + 4 + \dots + n$

1) Calculer w_1, w_2, w_3 et w_4

2) Exprimer w_{p+1} en fonction de w_p

Solution:

$$1) w_1 = 1$$

$$w_2 = 1 + 2 = 3$$

$$w_3 = 1 + 2 + 3 = 6$$

$$w_4 = 1 + 2 + 3 + 4 = 10$$

$$\begin{aligned} 2) w_{p+1} &= 1 + 2 + 3 + 4 + \dots + p + (p+1) \\ &= w_p + (p+1) \end{aligned}$$

$$w_{p+2} = 1 + 2 + \dots + p + (p+1) + (p+2)$$

$$= w_p + (p+1) + (p+2) = w_p + 2p + 3$$

Exp 4:

Soit la suite (u_n) définie par

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = 1 + u_n \quad ; n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

- 1) Calculer u_1 , u_2 et u_3
- 2) Exprimer u_{n+2} en fonction de u_n .

Solution:

$$1) \quad u_1 = 1 + u_0 = 1 + 1 = 2$$

$$u_2 = 1 + u_1 = 1 + 2 = 3$$

$$u_3 = 1 + u_2 = 1 + 3 = 4$$

$$2) \quad u_{n+2} = u_{(n+1)+1} = 1 + u_{n+1}$$

Cette suite de type récurrente

II - Suites arithmétiques

Activité 1 p41:

1) L'intérêt I en année :

$$I = \frac{1000 \times 5}{100} = 50^{DT}$$

2) a) $C_0 = 1000^{DT}$

$$C_1 = 1000 + 50 = 1050^{DT}$$

$$C_2 = 1050 + 50 = 1100^{DT}$$

$$C_3 = 1100 + 50 = 1150^{DT}$$

$$C_4 = 1150 + 50 = 1200^{DT}$$

$$C_5 = 1200 + 50 = 1250^{DT}$$

b) $C_6 = C_5 + 50$

c) $C_{n+1} = C_n + 50$

Définition :

Soit (u_n) une suite réelle, elle est dite **arithmétique** si et seulement si $u_{n+1} = u_n + r$ le réel " r " est appelé raison de la suite (u_n) .



Application :

Soit la suite (u_n) définie par :

$$u_n = 2n + 1$$

- 1 - Calculer u_0 , u_1 , u_2 et u_3
- 2 - Montrer que (u_n) est une suite arithmétique et déterminer son raison
- 3 - Placer les points $I_n(n, u_n)$ dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$

Solution:

$$\begin{aligned} 1) \quad 2_0 &= 2 \times 0 + 1 = 0 + 1 = \boxed{1} \\ 2_1 &= 2 \times 1 + 1 = 2 + 1 = \boxed{3} \\ 2_2 &= 2 \times 2 + 1 = 4 + 1 = \boxed{5} \\ 2_3 &= 2 \times 3 + 1 = 6 + 1 = \boxed{7} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) \quad 2_{n+1} - 2_n &= (2(n+1) + 1) - (2n + 1) \\ &= (2n + 2 + 1) - (2n + 1) \\ &= \cancel{2n} + 3 - \cancel{2n} - 1 \\ &= \boxed{2} \end{aligned}$$

Donc (2_n) est une suite arithmétique
de raison $\boxed{r=2}$.

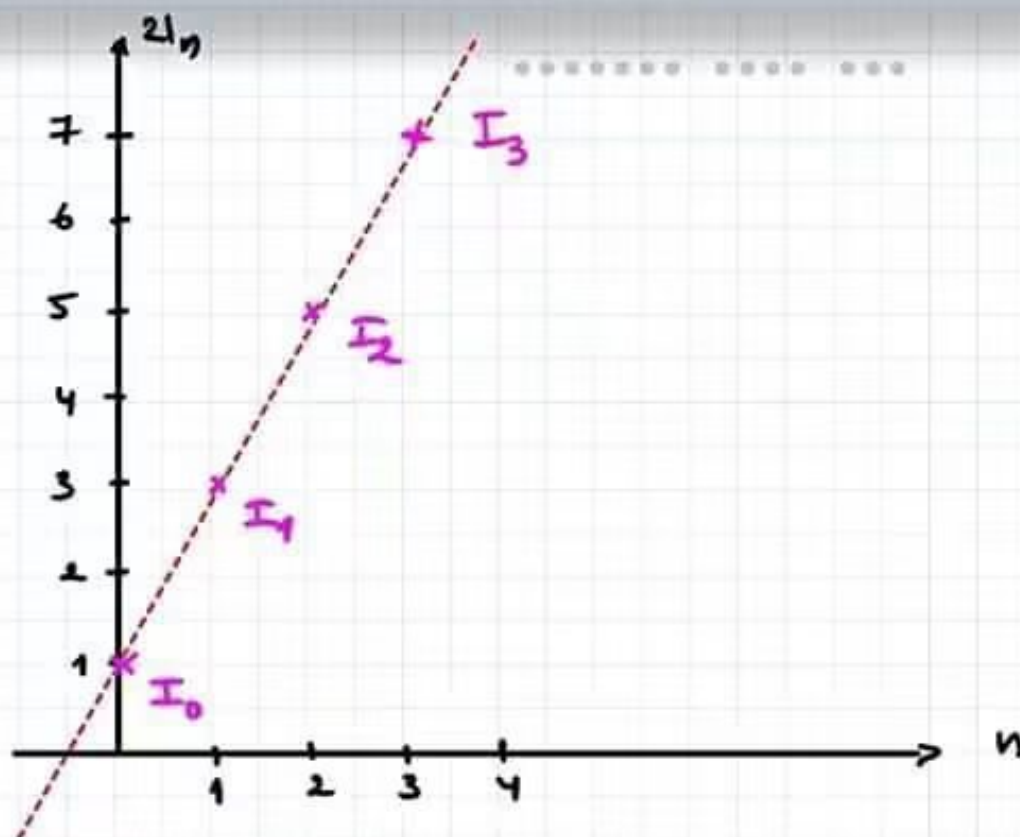
3) $I_n(n, 2_n)$

$$I_0(0, 2_0) \Rightarrow I_0(0, 1)$$

$$I_1(1, 2_1) \Rightarrow I_1(1, 3)$$

$$I_2(2, 2_2) \Rightarrow I_2(2, 5)$$

$$I_3(3, 2_3) \Rightarrow I_3(3, 7)$$



On constate que I_0, I_1, I_2 et I_3 sont alignés.

Exercice :

Parmi les suites suivantes lesquelles sont arithmétiques

$$2I_n = (n+1)^2 ; \quad v_n = 3 - 2n ; \quad w_n = \frac{n+1}{n+2}$$

Solution:

$$\star 21_n = (n+1)^2$$

$$\begin{aligned} 21_{n+1} - 21_n &= ((n+1)+1)^2 - (n+1)^2 \\ &= (n+2)^2 - (n+1)^2 \\ &= (n^2 + 2n \times 2 + 2^2) - (n^2 + 2n \times 1 + 1^2) \\ &= (n^2 + 4n + 4) - (n^2 + 2n + 1) \\ &= \cancel{n^2} + 4n + 4 - \cancel{n^2} - 2n - 1 \\ &= 2n + 3 \end{aligned}$$

Donc (21_n) n'est pas une suite arithmétique

$$\star v_n = 3 - 2n$$

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= (3 - 2(n+1)) - (3 - 2n) \\ &= (3 - 2n - 2) - (3 - 2n) \\ &= 1 - \cancel{2n} - 3 + \cancel{2n} \\ &= -2 \end{aligned}$$

Donc (v_n) est une suite arithmétique de raison $r = -2$

$$\star \quad w_n = \frac{n+1}{n+2}$$

$$\begin{aligned} w_{n+1} - w_n &= \left(\frac{\overbrace{(n+1)}^{n+1} + 1}{\overbrace{(n+1)}^{n+1} + 2} \right) - \left(\frac{n+1}{n+2} \right) \\ &= \frac{n+2}{n+3} - \frac{n+1}{n+2} \\ &= \frac{(n+2)(n+2) - (n+1)(n+3)}{(n+3)(n+2)} \\ &= \frac{\cancel{n^2} + \cancel{2n} + \cancel{2n} + 4 - \cancel{n^2} - \cancel{3n} - \cancel{n} - 3}{(n+3)(n+2)} \\ &= \frac{1}{(n+3)(n+2)} \end{aligned}$$

Donc (w_n) n'est pas une suite arithmétique

Exercice 1 p55 :

$$21_n = -\frac{1}{2}n + 5$$

$$1) \quad 21_1 = -\frac{1}{2} \times 1 + 5 = -\frac{1}{2} + \frac{10}{2} = \boxed{\frac{9}{2}}$$

$$21_2 = -\frac{1}{2} \times 2 + 5 = -1 + 5 = \boxed{4}$$

$$21_3 = -\frac{1}{2} \times 3 + 5 = -\frac{3}{2} + \frac{10}{2} = \boxed{\frac{7}{2}}$$

$$21_{12} = -\frac{1}{2} \times 12 + 5 = -6 + 5 = \boxed{-1}$$

$$\begin{aligned}
 2) \quad 2l_{n+1} - 2l_n &= \left(-\frac{1}{2}(n+1) + 5\right) - \left(-\frac{1}{2}n + 5\right) \\
 &= \left(-\frac{1}{2}n - \frac{1}{2} + 5\right) - \left(-\frac{1}{2}n + 5\right) \\
 &= -\cancel{\frac{1}{2}n} - \frac{1}{2} + \cancel{5} + \cancel{\frac{1}{2}n} - \cancel{5} \\
 &= -\frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

$$3) \quad 2l_{n+1} - 2l_n = -\frac{1}{2}$$

Donc $(2l_n)$ est une suite arithmétique

Terme général d'une suite arithmétique:

Activité 3 p43:

Soit $(2l_n)$ une suite arithmétique de raison r et de premier terme $2l_0$.

1)