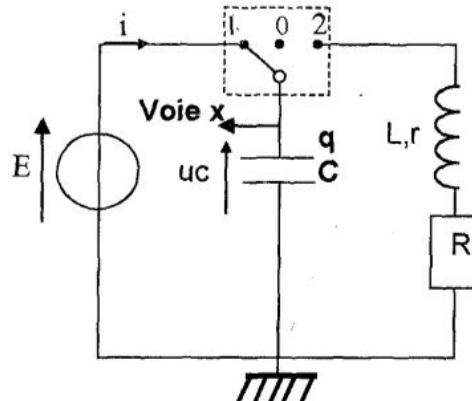




L'ESSENTIEL DU COURS

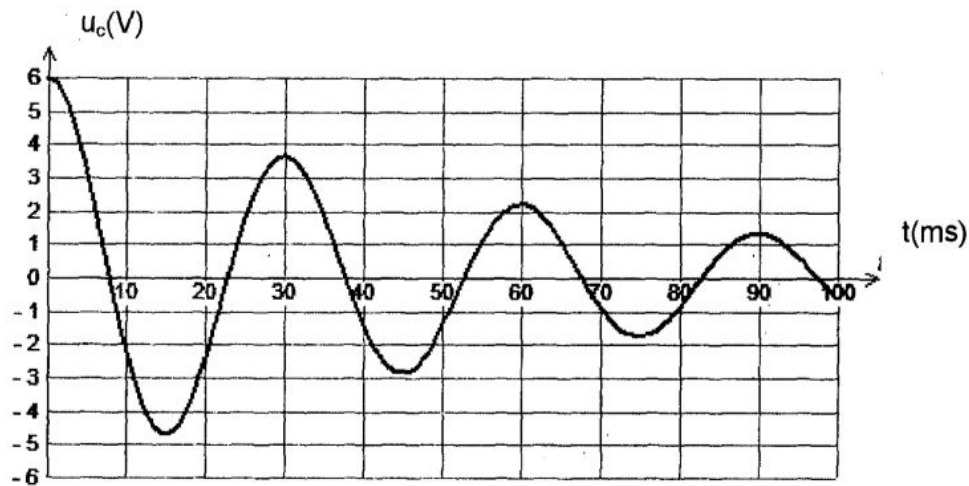
A- LES OSCILLATIONS ELECTRIQUES LIBRES AMORTIES :

* Etude expérimentale :



* K sur la position (1) : Charge instantanée du condensateur. A la fin de la charge on a : $u_c = U_{Cm} = E$ et $q = Q_m = C E$.

* K sur la position (2), on visualise sur l'écran de l'oscilloscope à mémoire la tension $u_c(t)$ aux bornes du condensateur, on obtient :



- Le circuit RLC série est le siège d'oscillations électriques libres amorties.

* Oscillations : La tension $u_c(t)$ varie de part et d'autre de sa valeur nulle.

* Libres : Les oscillations se produisent en absence du générateur.

* Amorties : l'amplitude des oscillations de $u_c(t)$ diminue au cours du temps.

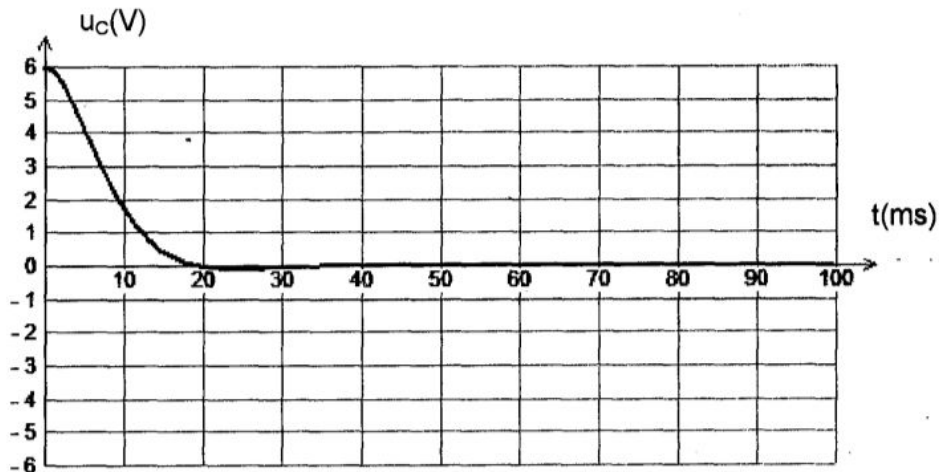
- Lorsque la résistance totale du circuit ($R+r$) est faible, le circuit est en régime pseudo-périodique caractérisé par une pseudo-période T .

- En régime pseudo-périodique, par augmentation de la résistance totale du circuit :

* Le nombre des oscillations, pendant la même durée, diminue.

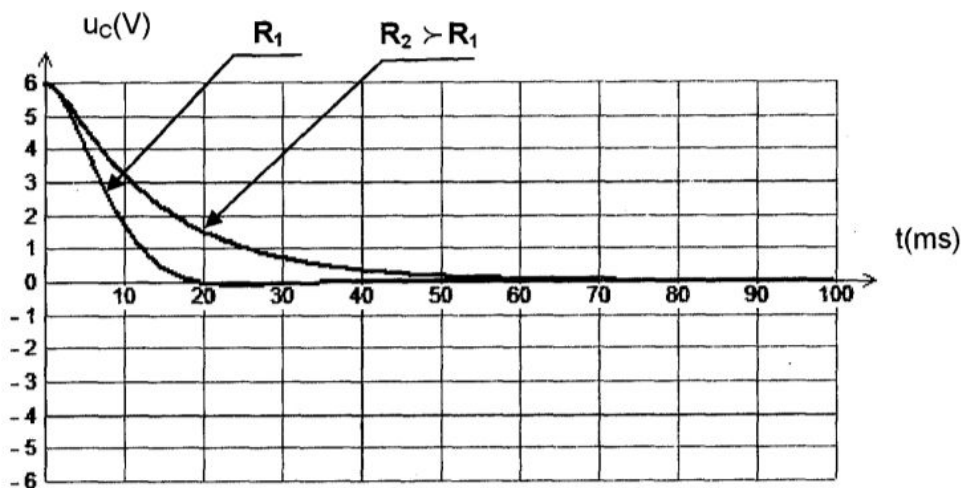
* La pseudo-période T augmente.

- Lorsque la résistance totale du circuit ($R + r$) est relativement importante, le régime n'est plus oscillatoire il est apériodique au cours duquel la tension $u_C(t)$ aux bornes du condensateur s'annule sans effectuer aucune oscillation.



En régime apériodique lorsqu'on augmente la résistance totale ($R + r$) du circuit la durée d'annulation de la tension $u_C(t)$ aux bornes du condensateur augmente.

- La résistance critique correspond à la plus petite résistance du circuit dans le régime apériodique associé à la plus petite durée d'annulation de la tension $u_C(t)$ aux bornes du condensateur.



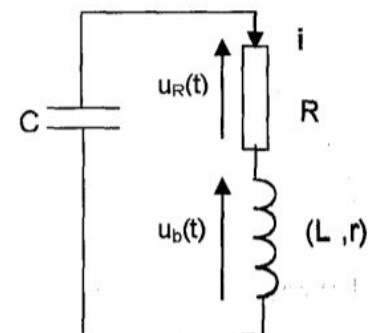
* Etude théorique.

- L'équation différentielle régissant l'évolution d'un circuit RLC série en régime libre en fonction de $u_C(t)$.

La loi des mailles : $u_b(t) + u_R(t) + u_C(t) = 0$ alors $L \frac{di(t)}{dt} + (R + r) i + u_C(t) = 0$

or $i = C \frac{du_C(t)}{dt}$ alors $LC \frac{d^2 u_C(t)}{dt^2} + (R + r) C \frac{du_C(t)}{dt} + u_C(t) = 0$ d'où

$$\frac{d^2 u_C(t)}{dt^2} + \frac{(R + r)}{L} \frac{du_C(t)}{dt} + \frac{1}{LC} u_C(t) = 0.$$



- Energie totale emmagasinée dans le circuit : $E_T = E_C + E_L$.

$$E_C = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C} = \frac{1}{2} C u_C^2 \text{ et } E_L = \frac{1}{2} L i^2 = \frac{1}{2} L \left(\frac{u_R}{R} \right)^2 = \frac{1}{2} L C^2 \left(\frac{du_C}{dt} \right)^2.$$

- Diminution de l'énergie totale d'un circuit RLC en série.

$$\frac{dE_T}{dt} = C \cdot u_C \cdot \frac{du_C}{dt} + L \cdot i \cdot \frac{di}{dt} = u_C \cdot i + L \cdot i \cdot \frac{di}{dt} = i \cdot \left(u_C + L \cdot \frac{di}{dt} \right) \text{ or } u_C + L \cdot \frac{di}{dt} = - (R+r) \cdot i \text{ d'où}$$

$$\frac{dE_T}{dt} = i \cdot (- (R+r) \cdot i) = - (R+r) \cdot i^2 < 0 \text{ car } (R+r) > 0 \text{ et } i^2 > 0 \text{ alors l'énergie totale } E_T \text{ diminue au cours du temps.}$$

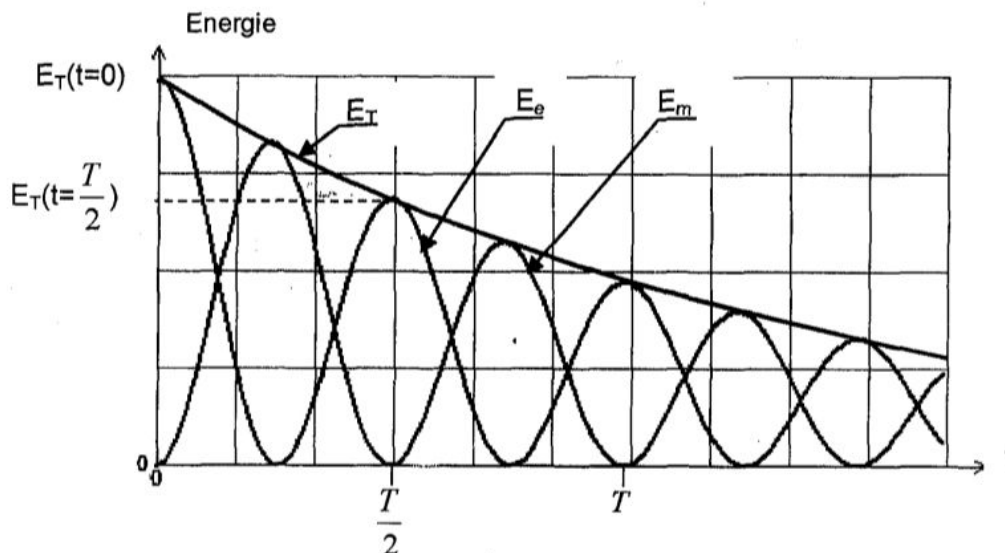
Cette diminution de l'énergie est due à l'existence d'une résistance dans le circuit RLC qui transforme une partie de cette énergie par effet Joule.

* Transformations mutuelles non intégrales des énergies électrique et magnétique.

- Au cours de la décharge du condensateur qui se produit entre $t_0 = nT$ et $t_1 = nT + \frac{T}{4}$, l'énergie E_C qui y est stockée diminue car $|q|$ diminue tandis que l'énergie E_L emmagasinée par la bobine augmente car $|i|$ augmente.

- Entre $t_1 = nT + \frac{T}{4}$ et $t_2 = nT + \frac{T}{2}$, l'énergie E_C qui y est stockée augmente car $|q|$ augmente tandis que l'énergie E_L emmagasinée par la bobine diminue car $|i|$ diminue d'où la transformation non intégrale de l'énergie magnétique en énergie électrique.

Au cours des oscillations pseudo-périodique il y a des transformations mutuelles non intégrales d'énergie électrostatique et d'énergie magnétique.



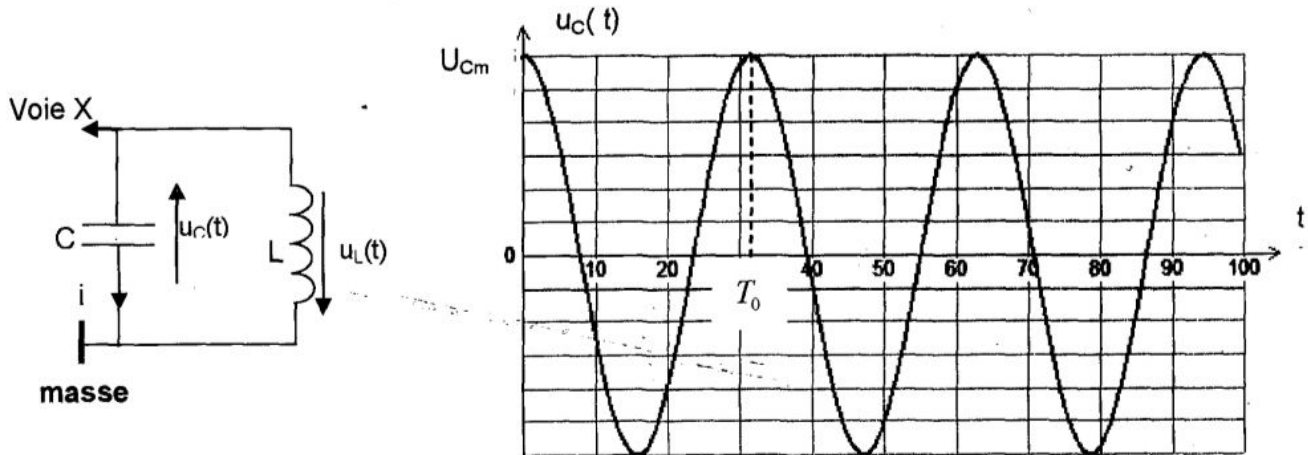
La variation d'énergie électromagnétique emmagasinée dans le circuit RLC entre les instants

$t_0 = 0$ et $t_1 = \frac{T}{2}$ est exprimée par : $\Delta E_{T(t_0 \rightarrow t_1)} = E_T(t_1) - E_T(t_0)$.

L'énergie $E_{\text{Thermique}}$ dissipée par effet Joule entre $t_0 = 0$ et $t_1 = \frac{T}{2}$ exprimée par : $E_{\text{Thermique}} = |E_T(t_1) - E_T(t_0)|$.

B- LES OSCILLATIONS ELECTRIQUES LIBRES NON AMORTIES :

* On ferme à $t=0$ un condensateur de capacité C initialement chargé sur une bobine purement inductive d'inductance L et on visualise la tension $u_c(t)$ aux bornes du condensateur.



* L'équation différentielle régissant l'évolution d'un circuit LC série en régime libre en fonction de $u_c(t)$.

La loi des mailles : $u_L(t) + u_c(t) = 0$ alors $L \frac{di(t)}{dt} + u_c(t) = 0$ or $i = C \frac{du_c(t)}{dt}$ alors $LC \frac{d^2 u_c(t)}{dt^2} + u_c(t) = 0$

d'où $\frac{d^2 u_c(t)}{dt^2} + \frac{1}{LC} u_c(t) = 0$.

Cette équation différentielle admet comme solution: $u_c(t) = U_{cm} \sin(\omega_0 t + \varphi_{u_c})$ avec

U_{cm} : amplitude de $u_c(t)$ et s'exprime en V.

ω_0 : pulsation propre de l'oscillateur LC exprimée par la relation $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = 2\pi N_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}$ (rad.s⁻¹).

T_0 : période propre des oscillations : $T_0 = 2\pi \sqrt{LC}$ et N_0 : fréquence propre des oscillations : $N_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$.

φ_{u_c} : phase initiale de $u_c(t)$ (rad).

* $q(t)$: charge instantanée du condensateur : $q(t) = C u_c(t) = C U_{cm} \sin(\omega_0 t + \varphi_{u_c}) = Q_m \sin(\omega_0 t + \varphi_q)$ avec $Q_m = C U_{cm}$ et $\varphi_{u_c} = \varphi_q$ alors le déphasage de $q(t)$ par rapport à $u_c(t)$ est $\Delta\varphi = \varphi_{u_c} - \varphi_q = 0$ d'où $q(t)$ et $u_c(t)$ sont en phase (elles prennent leurs valeurs maximales au même temps).

* $i(t)$: intensité du courant électrique instantanée : $i(t) = \frac{dq(t)}{dt} = Q_m \omega_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_q)$ alors

$i(t) = Q_m \omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_q + \frac{\pi}{2}) = I_m \sin(\omega_0 t + \varphi_i)$ avec $I_m = Q_m \omega_0$ et $\varphi_i = \varphi_q + \frac{\pi}{2}$ alors le déphasage de

$i(t)$ par rapport à $q(t)$ est $\Delta\varphi = \varphi_i - \varphi_q = \frac{\pi}{2}$ rad d'où $i(t)$ est en quadrature avance de phase par rapport

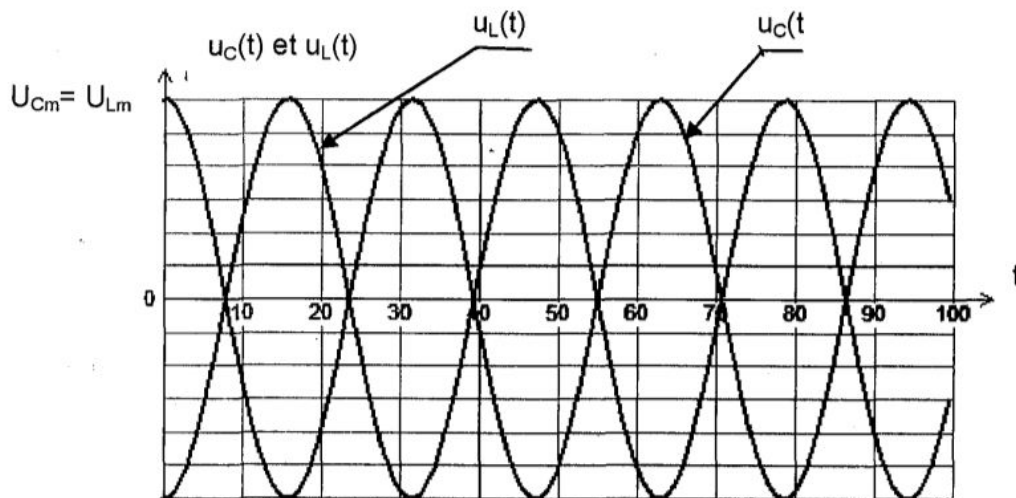
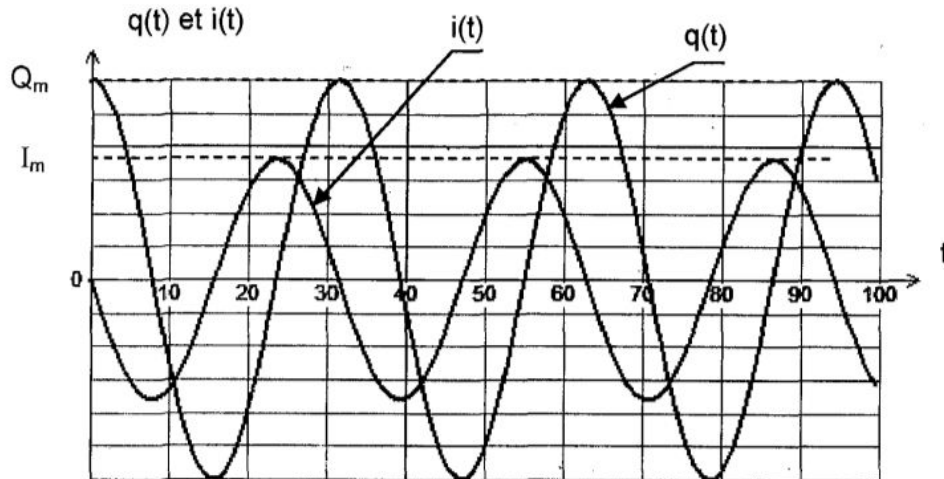
à $q(t)$ et à $u_c(t)$ ($i(t)$ prend sa valeur maximale la première et que lorsque l'une prend sa valeur max ou min l'autre s'annule).

* $u_L(t)$: tension électrique instantanée aux bornes de la bobine : $u_c(t) + u_L(t) = 0$ alors $u_L(t) = -u_c(t)$ alors $u_L(t) = -U_{Cm} \sin(\omega_0 t + \varphi_{u_c}) = U_{Cm} \sin(\omega_0 t + \varphi_{u_c} + \pi) = U_{Lm} \sin(\omega_0 t + \varphi_{u_L})$ avec $U_{Lm} = U_{Cm}$ et

$\varphi_{u_L} = \varphi_{u_c} + \pi$ alors le déphasage de $u_L(t)$ par rapport à $u_c(t)$ est $\Delta\varphi = \varphi_{u_L} - \varphi_{u_c} = \pi$ rad d'où

$u_L(t)$ et $u_c(t)$ sont en opposition de phase ($u_L(t)$ et $u_c(t)$ s'annulent au même temps mais lorsque l'une prend sa valeur max l'autre prend sa valeur min).

* Représentation graphique de $q(t)$, $i(t)$, $u_c(t)$ et $u_L(t)$



* **Remarques :**

- Un ampèremètre de résistance négligeable branché en série dans un circuit LC indique l'intensité

efficace I_{eff} ou I du courant électrique tel que $I_{\text{eff}} = \frac{I_{\text{max}}}{\sqrt{2}}$.

- Un voltmètre de grande résistance branché en parallèle du condensateur ou une bobine dans un

circuit LC indique la tension efficace U_{eff} ou U tel que $U_{\text{eff}} = \frac{U_{\text{max}}}{\sqrt{2}}$.

* La relation indépendante du temps entre $q(t)$ et $i(t)$.

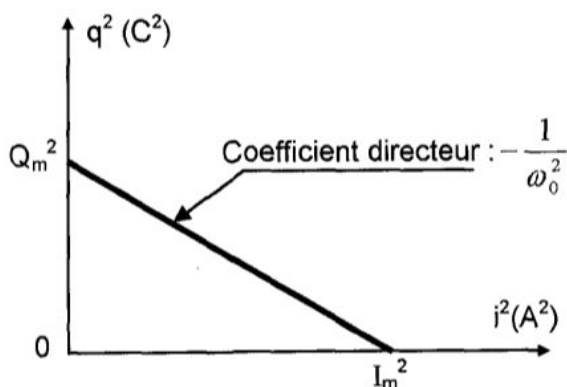
$q(t) = Q_m \cdot \sin(\omega_0 t + \varphi_q)$ et $i(t) = Q_m \omega_0 \cdot \cos(\omega_0 t + \varphi_q)$ alors

$q^2(t) = Q_m^2 \cdot \sin^2(\omega_0 t + \varphi_q)$ et $i^2(t) = Q_m^2 \omega_0^2 \cdot \cos^2(\omega_0 t + \varphi_q)$ alors

$\frac{q^2(t)}{Q_m^2} = \sin^2(\omega_0 t + \varphi_q)$ et $\frac{i^2(t)}{Q_m^2 \omega_0^2} = \cos^2(\omega_0 t + \varphi_q)$ alors $\frac{q^2(t)}{Q_m^2} + \frac{i^2(t)}{Q_m^2 \omega_0^2} = 1$ alors $i^2 = -\omega_0^2 q^2 + \omega_0^2 Q_m^2$ et

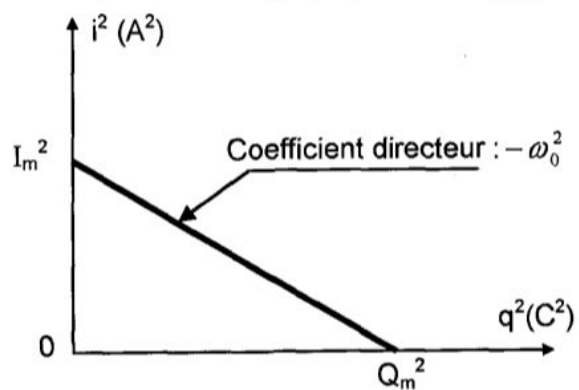
$$q^2 = -\frac{1}{\omega_0^2} i^2 + Q_m^2.$$

* Représentation graphique de $q^2 = f(i^2)$.



$$q^2 = -\frac{1}{\omega_0^2} i^2 + Q_m^2.$$

Représentation graphique de $i^2 = f(q^2)$.



$$i^2 = -\omega_0^2 q^2 + \omega_0^2 Q_m^2$$

* Conservation de l'énergie électromagnétique emmagasinée dans le circuit LC.

1^{ère} méthode :

$$E_T = \frac{1}{2} C u_c^2 + \frac{1}{2} L \cdot i^2 \text{ alors } \frac{dE_T}{dt} = C u_c \frac{du_c}{dt} + L \cdot i \cdot \frac{di}{dt} = u_c i + L \cdot i \cdot \frac{di}{dt} = i \cdot (u_c + L \cdot \frac{di}{dt}) = 0, \text{ car}$$

d'après l'équation différentielle $L \cdot \frac{di}{dt} + u_c = 0$ par suite $\frac{dE_T}{dt} = 0$ donc le circuit LC est conservatif.

2^{ème} méthode :

$$E_T = \frac{1}{2} C u_c^2 + \frac{1}{2} L \cdot i^2 = \frac{1}{2} C U_{cm}^2 \sin^2(\omega_0 t + \varphi_{u_c}) + \frac{1}{2} L I_m^2 \cos^2(\omega_0 t + \varphi_q) \text{ or } I_m^2 = Q_m^2 \times \omega_0^2 = C^2 U_{cm}^2 \times \frac{1}{LC}$$

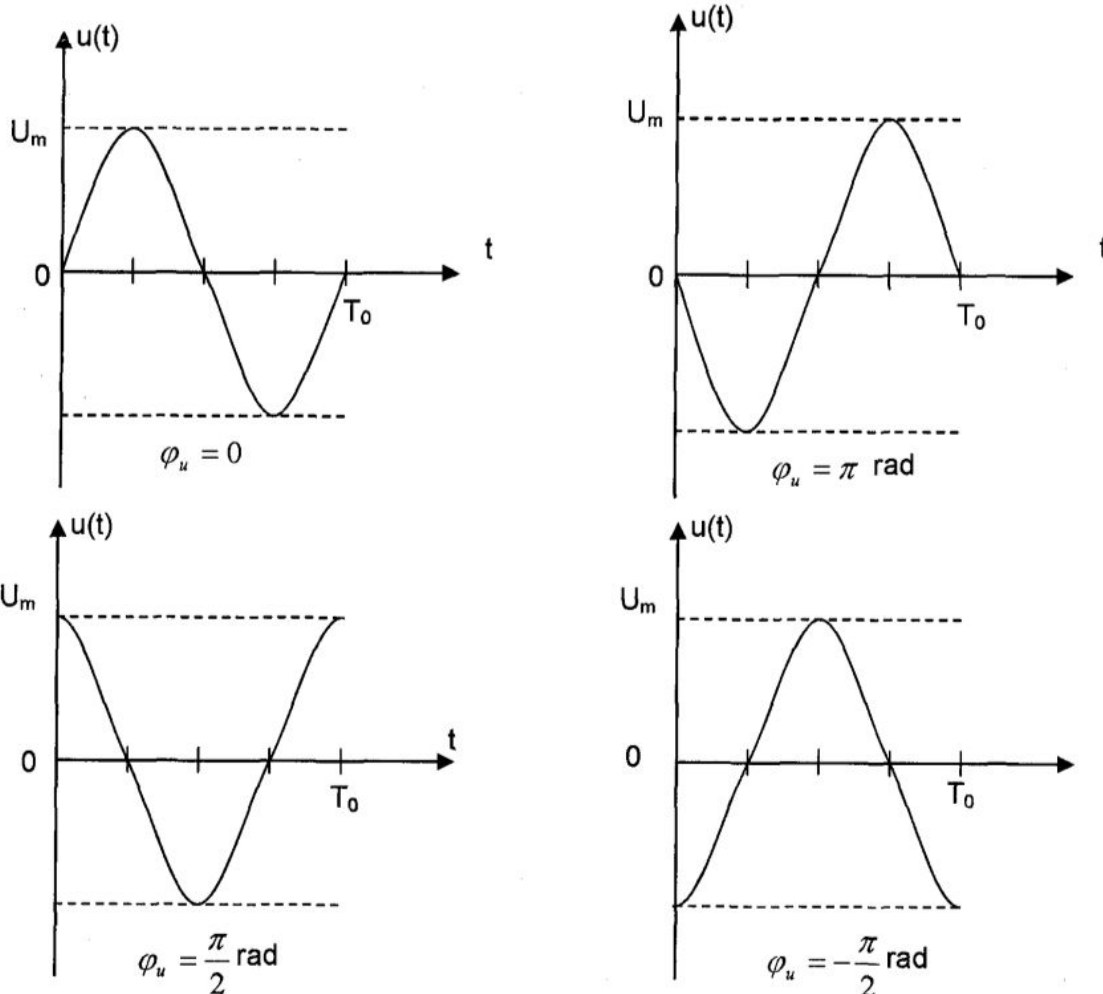
$$\text{d'où } E_T = \frac{1}{2} C U_{cm}^2 \sin^2(\omega_0 t + \varphi_{u_c}) + \frac{1}{2} L C^2 U_{cm}^2 \times \frac{1}{LC} \cos^2(\omega_0 t + \varphi_q) \text{ alors}$$

$$E_T = \frac{1}{2} C U_{cm}^2 (\sin^2(\omega_0 t + \varphi_{u_c}) + \cos^2(\omega_0 t + \varphi_q)) = \frac{1}{2} C U_{cm}^2 = \frac{1}{2} \frac{Q_m^2}{C} = \frac{1}{2} L I_m^2 = \text{Cte.}$$

3^{ème} méthode :

$$E_T = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C} + \frac{1}{2} L \cdot i^2 \text{ or } i^2 = -\omega_0^2 q^2 + \omega_0^2 Q_m^2 \text{ donc } E_T = \frac{1}{2} \frac{Q_m^2}{C} = \frac{1}{2} L \cdot I_m^2.$$

* Pour toute grandeur oscillante $u(t)$ et varie sinusoidalement au cours du temps $u(t) = U_m \sin(\omega_0 t + \varphi_u)$.



* Expression de E_e et E_m en fonction du temps.

$$E_e = \frac{1}{2} \frac{q(t)^2}{C} \text{ or } q(t) = Q_m \sin(\omega_0 t + \varphi_q) \text{ alors } E_e = \frac{1}{2} \frac{Q_m^2}{C} \sin^2(\omega_0 t + \varphi_q) \text{ or}$$

$$\sin^2(\omega_0 t + \varphi_q) = \frac{1 - \cos(2\omega_0 t + 2\varphi_q)}{2} \text{ d'où } E_e = \frac{1}{4} \frac{Q_m^2}{C} (1 - \cos(2\omega_0 t + 2\varphi_q)) \text{ or } E_T = \frac{1}{2} \frac{Q_m^2}{C} \text{ alors}$$

$$E_e = \frac{E_T}{2} (1 - \cos(2\omega_0 t + 2\varphi_q)).$$

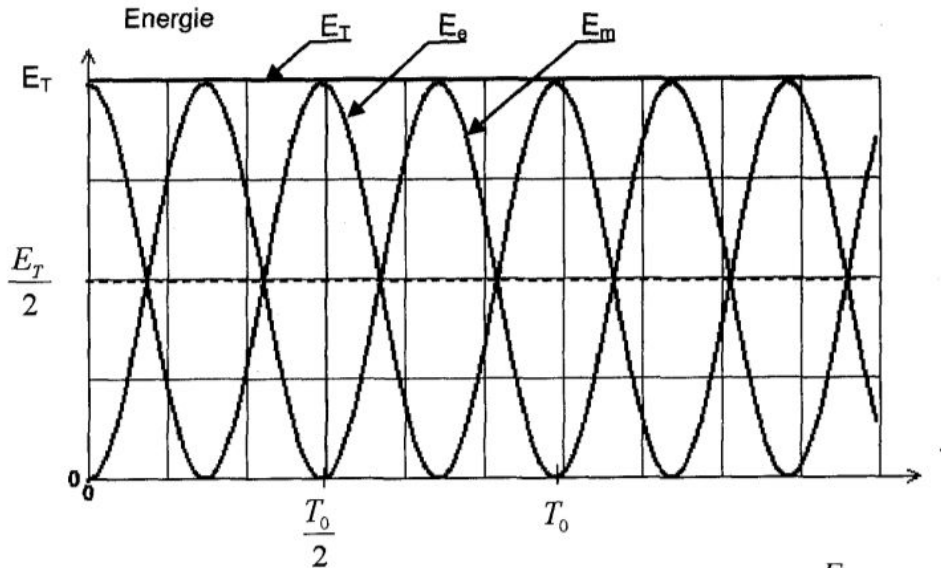
$$E_m = \frac{1}{2} L i^2 \text{ or } i(t) = Q_m \omega_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_q) \text{ alors } E_m = \frac{1}{2} L Q_m^2 \omega_0^2 \cos^2(\omega_0 t + \varphi_q) \text{ or}$$

$$\cos^2(\omega_0 t + \varphi_q) = \frac{1 + \cos(2\omega_0 t + 2\varphi_q)}{2} \text{ et } L \omega_0^2 = \frac{1}{C} \text{ d'où } E_m = \frac{1}{4} \frac{Q_m^2}{C} (1 + \cos(2\omega_0 t + 2\varphi_q)) \text{ or } E_T = \frac{1}{2} \frac{Q_m^2}{C}$$

$$\text{alors } E_m = \frac{E_T}{2} (1 + \cos(2\omega_0 t + 2\varphi_q)).$$

$E_e(t)$ et $E_m(t)$ sont deux fonctions périodiques de pulsation $\omega = 2 \omega_0$ et de période $T = \frac{T_0}{2} = \pi \sqrt{LC}$.

* Représentation graphique de $E_e(t)$, $E_m(t)$ et E_T lorsque $\varphi_q = \frac{\pi}{2}$ rad.



* Détermination des dates de l'intervalle $[0, T_0]$ aux quelles $E_e = E_m = \frac{E_T}{2}$ lorsque $\varphi_q = \frac{\pi}{2}$ rad.

$$E_m = \frac{E_T}{2} (1 + \cos(2\omega_0 t + 2\varphi_q)) = \frac{E_T}{2} \text{ alors } 1 + \cos(2\omega_0 t + 2\varphi_q) = 1 \text{ alors } \cos(2\omega_0 t + 2\varphi_q) = 0 \text{ alors}$$

$$2\omega_0 t + 2\varphi_q = \frac{\pi}{2} + K\pi \text{ alors } \frac{4\pi}{T_0} t + \pi = \frac{\pi}{2} + K\pi \text{ alors } t = (-\frac{1}{2} + K) \frac{T_0}{4} \text{ or } 0 \leq t \leq T_0 \text{ d'où}$$

$$0 \leq (-\frac{1}{2} + K) \frac{T_0}{4} \leq T_0 \text{ alors } 0,5 \leq K \leq 4,5$$

K	1	2	3	4
t	$\frac{T_0}{8}$	$\frac{3T_0}{8}$	$\frac{5T_0}{8}$	$\frac{7T_0}{8}$

* Représentation de E_e , E_m et E_T en fonction de q et q^2 .

$$E_e = \frac{1}{2} \frac{q(t)^2}{C}$$

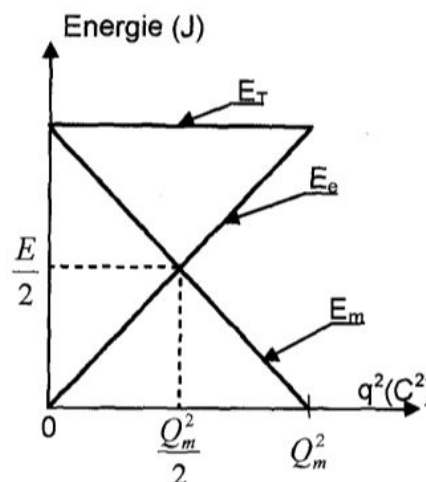
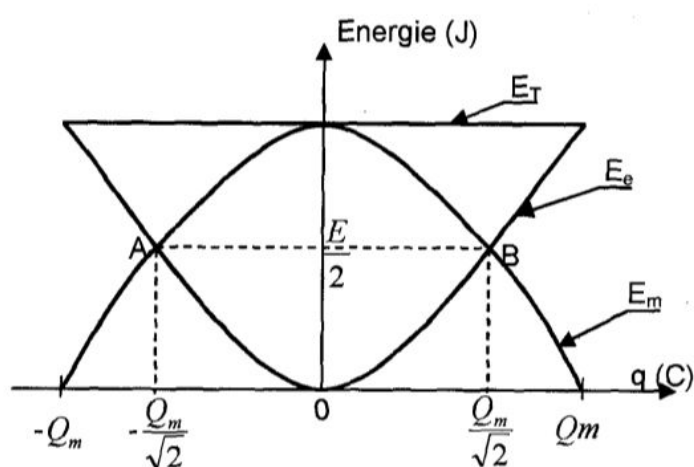
$E_e = f(q)$ est une branche parabolique de concavité orientée vers les énergies positives.

$E_e = g(q^2)$ est une droite linéaire de coefficient directeur égale à $\frac{1}{2C}$.

$$E_m = \frac{1}{2} L i^2 = E_T - E_e = E_T - \frac{1}{2} \frac{q(t)^2}{C}$$

$E_m = f'(q)$ est une branche parabolique de concavité orientée vers les énergies négatives.

$E_m = g'(q^2)$ est une droite affine de coefficient directeur égale à $-\frac{1}{2C}$.



Les abscisses des points A et B :

$$E_e = E_m = \frac{E_T}{2} \text{ alors } \frac{1}{2} \frac{q^2}{C} = \frac{1}{4} \frac{Q_m^2}{C} \text{ car } E_T = \frac{1}{2} \frac{Q_m^2}{C} \text{ d'où } q^2 = \frac{Q_m^2}{2} \text{ d'où } q = \pm \frac{Q_m}{\sqrt{2}}.$$

* Représentation de E_e , E_m et E_T en fonction de i et i^2 .

$$E_m = \frac{1}{2} L i^2.$$

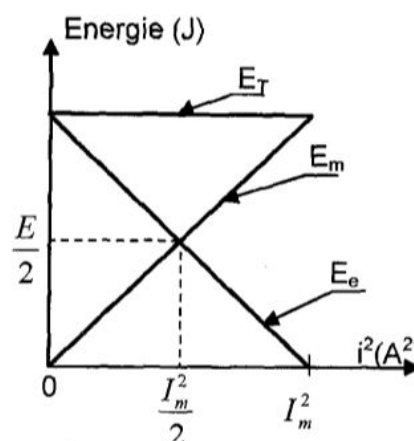
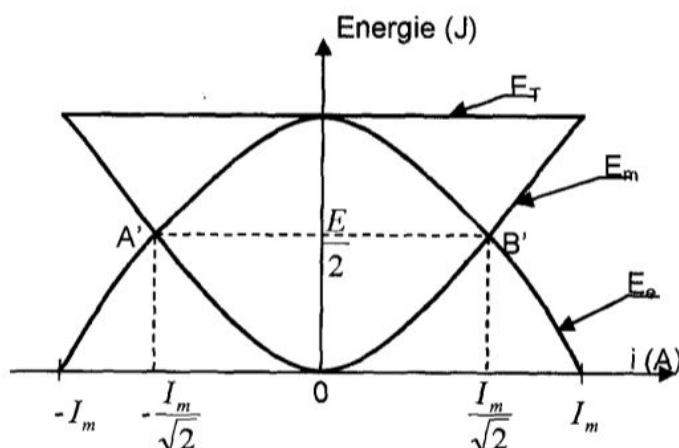
$E_m = f(i)$ est une branche parabolique de concavité orientée vers les énergies positives.

$E_m = g(i^2)$ est une droite linéaire de coefficient directeur égale à $\frac{1}{2} L$.

$$E_e = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C} = E_T - E_m = E_T - \frac{1}{2} L i^2.$$

$E_e = f'(i)$ est une branche parabolique de concavité orientée vers les énergies négatives.

$E_e = g'(i^2)$ est une droite affine de coefficient directeur égale à $-\frac{1}{2} L$.



* Les abscisses des points A' et B' :

$$E_e = E_m = \frac{E_T}{2} \text{ alors } \frac{1}{2} L i^2 = \frac{1}{4} L I_m^2 \text{ car } E_T = \frac{1}{2} L I_m^2 \text{ d'où } i^2 = \frac{I_m^2}{2} \text{ d'où } i = \pm \frac{I_m}{\sqrt{2}}.$$