



RESUME DU COURS

Définition : Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et a un réel de I .

On dit que f est dérivable en a , s'il existe un nombre réel ℓ tel que : $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \ell$ Ou encore $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \ell$. Le réel ℓ est alors appelé le nombre dérivé de f en a et il est noté $f'(a)$.

Conséquence : Le plan est muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et a un réel de I . f est dérivable en a , si et seulement si, la courbe représentative de f admet au point $M(a, f(a))$ une tangente de pente un nombre réel. Cette tangente est d'équation

$$y = f'(a)(x - a) + f(a). \text{ Un vecteur directeur de cette tangente est } \vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ f'(a) \end{pmatrix}.$$

Définition : Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et a un réel de I .

Si f est dérivable en a , alors le réel $f(a) + f'(a)h$ est une approximation affine de $f(a+h)$ et on écrit $f(a+h) \approx f(a) + f'(a)h$, pour h voisin de zéro.

Définition : * Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $]b, a]$.

On dit que f est dérivable à gauche en a , si le rapport $\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ admet une limite finie quand h tend vers 0^- . Cette limite est alors notée $f'_g(a)$ et est appelée le nombre dérivé de f à gauche en a .

* Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $[a, b[$.

On dit que f est dérivable à droite en a , si le rapport $\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ admet une limite finie quand h tend vers 0^+ . Cette limite est alors notée $f'_d(a)$ et est appelée le nombre dérivé de f à droite en a .

Théorème : Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et a un réel de I .

La fonction f est dérivable en a si, et seulement si, f est dérivable à droite et à gauche et $f'_g(a) = f'_d(a)$. On a alors $f'(a) = f'_g(a) = f'_d(a)$.

Conséquence : Le plan est muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et a un réel de I .

* f est dérivable à droite en a , si et seulement si, la courbe représentative de f admet au point $A(a, f(a))$ une demi-tangente déterminée par $y = f'_d(a)(x - a) + f(a)$, $x \geq a$.

Un vecteur directeur de cette demi tangente est $\vec{u}_d \begin{pmatrix} 1 \\ f'_d(a) \end{pmatrix}$.

* f est dérivable à gauche en a , si et seulement si, la courbe représentative de f admet au point $A(a, f(a))$ une demi-tangente déterminée par $y = f'_g(a)(x - a) + f(a)$, $x \leq a$.

Un vecteur directeur de cette demi-tangente est $\vec{u}_g \begin{pmatrix} -1 \\ -f'_g(a) \end{pmatrix}$.

Définition ; Le plan est muni d'un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Soit f une fonction définie sur un intervalle I et a un réel de I .

Si $\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = +\infty$ (ou $-\infty$) alors la courbe représentative de f admet au point $M(a, f(a))$ une demi-tangente verticale.

Si $\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = +\infty$ (ou $-\infty$) alors la courbe représentative de f admet au point $M(a, f(a))$ une demi-tangente verticale.

Théorème : Soit f une fonction dérivable un intervalle I soit α et β deux réels . Alors la fonction $g : x \mapsto f(\alpha x + \beta)$ est dérivable en tout réel x tel que $\alpha x + \beta$ appartient à I . De plus la fonction g' est définie par $g'(x) = \alpha f'(\alpha x + \beta)$.

Dérivées des fonctions usuelles :

Fonction	Domaine de dérivabilité	Dérivée
$x \mapsto a$ (a constante)	$\mathbb{R}$	$x \mapsto 0$
$x \mapsto x$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto 1$
$x \mapsto x^n$ $n \in \mathbb{N} ; n \geq 1$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto n \cdot x^{n-1}$
$x \mapsto \frac{1}{x^n}$	$\mathbb{R}^*$	$x \mapsto \frac{-n}{x^{n+1}}$
$x \mapsto \sqrt{x}$	$\mathbb{R}_+^*$	$x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}$
$x \mapsto \cos(ax + b)$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto -a \sin(ax + b)$
$x \mapsto \sin(ax + b)$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto a \cos(ax + b)$
$x \mapsto \tan(ax + b)$	$I = \left\{ x \in \mathbb{R} \text{ tel que : } ax + b \neq \frac{\pi}{2} + k\pi ; k \in \mathbb{Z} \right\}$	$x \mapsto a(1 + \tan^2(ax + b))$
$x \mapsto \cot(ax + b)$	$I = \{ x \in \mathbb{R} \text{ tel que : } ax + b \neq k\pi ; k \in \mathbb{Z} \}$	$x \mapsto -a(1 + \cot^2(ax + b))$

Opérations sur les dérivées :

Fonction	Fonction dérivée
$u + v$	$u' + v'$
λu	$\lambda u'$
uv	$u'v + v'u$
$u^n ; n \in \mathbb{Z}$	$nu'u^{n-1}$
$\frac{1}{v}$ (v ne s'annule pas sur I)	$-\frac{v'}{v^2}$
$\frac{u}{v}$	$\frac{u'v - v'u}{v^2}$