

I. Limite finie à l'infini :• **Activité 1:**

Soit la fonction f définie sur $[2, +\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{(x-1)^2} + 1$

Compléter le tableau suivant :

x	10	100	1000	10^5
$f(x)$				

↪ Lorsque x prend des valeurs de plus en plus grandes, $f(x)$ se rapproche de plus en plus de ...

On dit alors que lorsque x tend vers, $f(x)$ tend vers

Ou que la **limite** de la fonction f lorsque x tend vers est égale à ...

Ce que l'on résume par :

$$\lim_{x \rightarrow \dots} f(x) = \dots \text{ ou } \lim_{\dots} f = \dots$$

• **Activité 2:**

Soit la fonction g définie sur $] -\infty, 0]$ par $g(x) = \frac{1}{(x-1)^3} + 1$

Compléter le tableau suivant :

x	-10	-100	-1000	-10^5
$g(x)$				

↪ Lorsque x tend vers, $g(x)$ tend vers

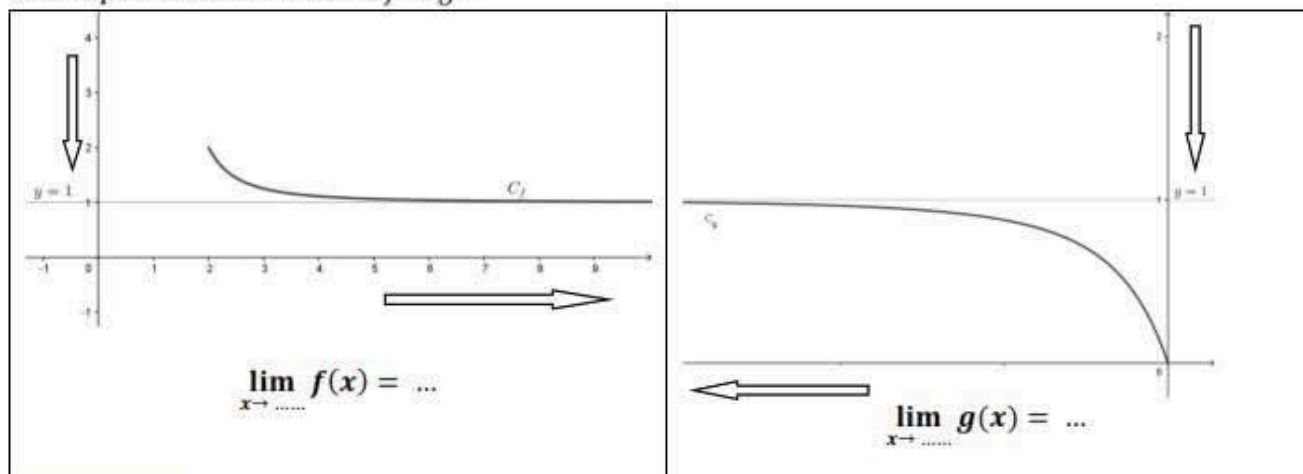
On dit alors la **limite** de la fonction g lorsque x tend vers est égale à ...

Ce que l'on résume par :

$$\lim_{x \rightarrow \dots} g(x) = \dots \text{ ou } \lim_{\dots} g = \dots$$

Interprétation graphique : "Notion d'asymptotes horizontales"

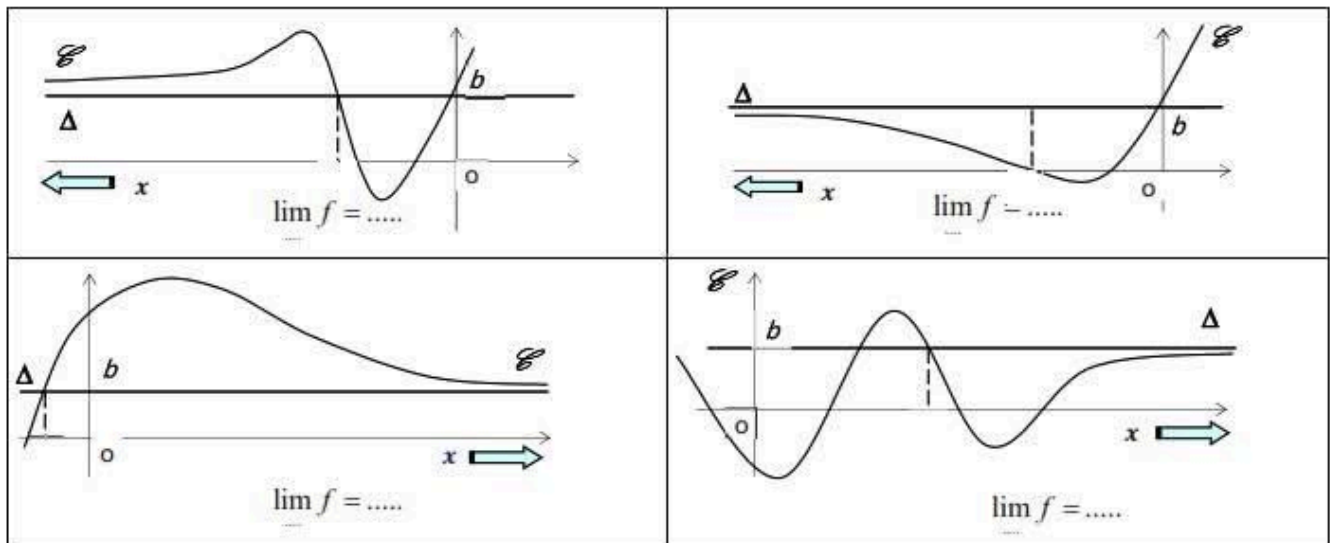
On a représenté les fonctions f et g :

↪ **Définitions :**

Soit f une fonction définie sur un intervalle de borne $+\infty$ ou $-\infty$ et C_f sa courbe représentative dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$

■ Lorsque $\lim_{x \rightarrow +\infty} f = b$ on dit que la droite d'équation est une asymptote horizontale à C_f au voisinage de

■ Lorsque $\lim_{x \rightarrow -\infty} f = b$ on dit que la droite d'équation est une asymptote horizontale à C_f au voisinage de



Application : Exercice 2 page 181

II. Limite infinie en un point :

• Activité 1:

Soit la fonction f définie sur $[0,1[\cup]1, +\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{(x-1)^3}$

Compléter le tableau suivant :

x	0,9	0,99	0,999	1,001	1,01	1,1
$f(x)$						

↪ Lorsque x se rapproche de 1, en restant supérieur à 1, $f(x)$ tend vers

On dit alors que lorsque x tend vers, $f(x)$ tend vers

Ou que la **limite** de la fonction f lorsque x tend vers est égale à ...

Ce que l'on résume par :

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \dots \text{ ou } \lim_{x \rightarrow 1^+} f = \dots$$

↪ Lorsque x se rapproche de 1, en restant inférieur à 1, $f(x)$ tend vers

On dit alors que lorsque x tend vers, $f(x)$ tend vers

Ou que la **limite** de la fonction f lorsque x tend vers est égale à ...

Ce que l'on résume par :

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \dots \text{ ou } \lim_{x \rightarrow 1^-} f = \dots$$

• Activité 2:

Soit la fonction g définie sur $[0,1[\cup]1, +\infty[$ par $f(x) = \frac{-1}{(x-1)^3}$

Compléter le tableau suivant :

x	0,9	0,99	0,999	1,001	1,01	1,1
$g(x)$						

↪ Lorsque x se rapproche de 1, en restant supérieur à 1, $g(x)$ tend vers

On dit alors que lorsque x tend vers, $g(x)$ tend vers

Ou que la **limite** de la fonction g lorsque x tend vers est égale à ...

Ce que l'on résume par :

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = \dots \text{ ou } \lim_{x \rightarrow 1^+} g = \dots$$

↪ Lorsque x se rapproche de 1, en restant inférieur à 1, $g(x)$ tend vers

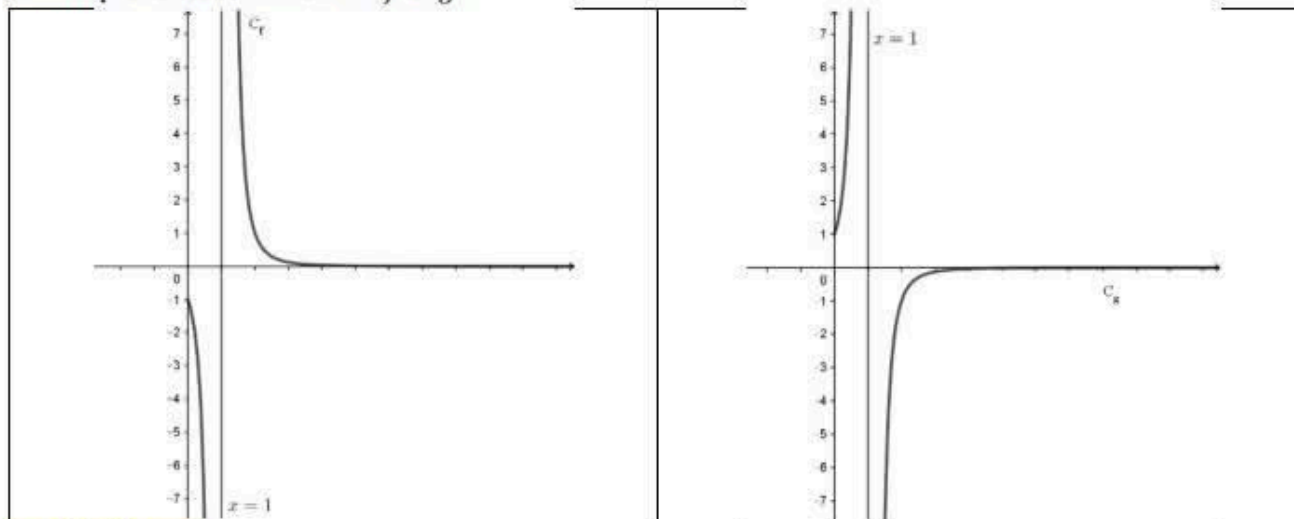
On dit alors que lorsque x tend vers, $g(x)$ tend vers

Ou que la **limite** de la fonction g lorsque x tend vers est égale à
Ce que l'on résume par :

$$\lim_{x \rightarrow \dots} g(x) = \dots \dots \text{ ou } \lim_{\dots} g = \dots \dots$$

Interprétation graphique : "Notion d'asymptotes verticales"

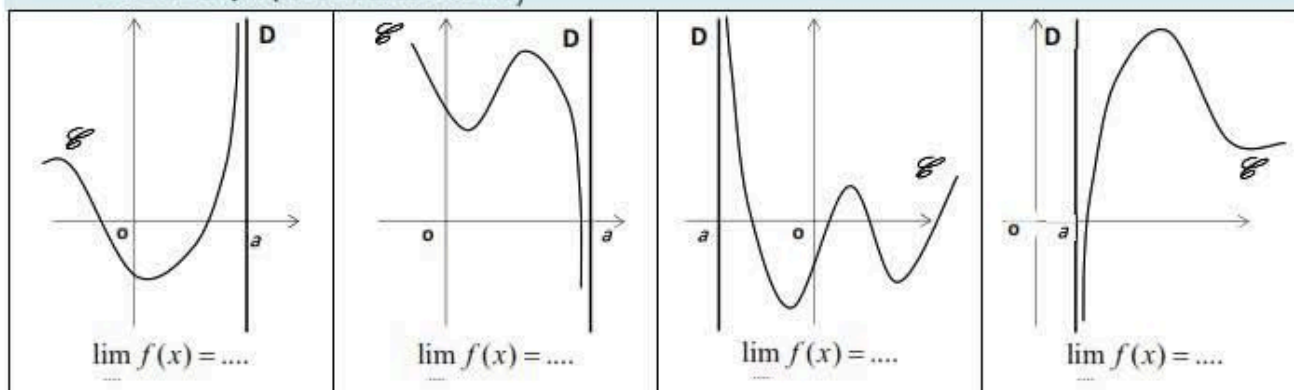
On a représenté les fonctions f et g :



↳ Définitions :

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert de borne a et C_f sa courbe représentative dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$

si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty$ ou $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \pm\infty$ ou $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \pm\infty$ alors la droite d'équation $x = \dots$ est une asymptote verticale à C_f



Théorème :

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I , sauf en un réel a de I

- Si $\lim_{x \rightarrow a^-} f = \lim_{x \rightarrow a^+} f = +\infty$ alors $\lim_{x \rightarrow a} f = \dots$
- Si $\lim_{x \rightarrow a^-} f = \lim_{x \rightarrow a^+} f = -\infty$ alors $\lim_{x \rightarrow a} f = \dots$

Limite des fonctions usuelles :

$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = \dots$	$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = \dots$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = \dots$	$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = \dots$
--	--	--	---

Application : Activité 3 page 187

III. Limite infinie à l'infini :

- **Activité 2** page 181 ; 1) et 6) :
- **Activité 3** page 182 ; 1) et 6) :
- **Activité 4** page 182 ; 3) et 4) :
- **Activité 5** page 182 :

↳ Limites de fonction de références à l'infini :

$f(x) =$	$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$
x		
x^2		
x^3		
$\sqrt{x}$		
$ x $		

Interprétation graphique : "Notion de branche parabolique et d'asymptote oblique"

- **Activité 6** page 183 :

Plus généralement :

Soit f une fonction telle que $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty$

- Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \pm\infty$ (respectivement $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \pm\infty$), on dit alors que la courbe (C) admet, au voisinage de $+\infty$ (respectivement $-\infty$), une
-
- Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ (respectivement $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$), on dit alors que la courbe (C) admet, au voisinage de $+\infty$ (respectivement $-\infty$), une
-

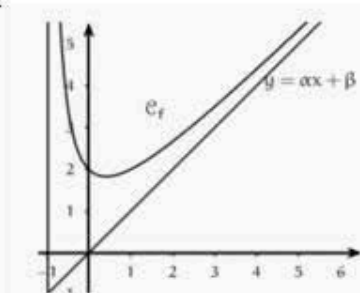
Application : Activité 7 page 183

Définitions : "asymptote oblique"

Soit f une fonction définie sur un intervalle de borne $+\infty$ ou $-\infty$ et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ et D une droite d'équation $y = ax + b$

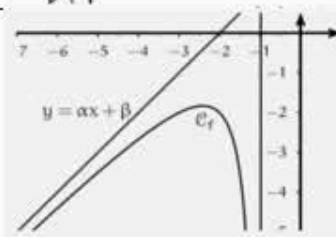
* Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (ax + b)] = \dots$ alors

la droite $D: y = ax + b$ est une asymptote oblique à $\mathcal{C}_f$ au voisinage de $+\infty$



* Si $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (ax + b)] = \dots$ alors

la droite $D: y = ax + b$ est une asymptote oblique à $\mathcal{C}_f$ au voisinage de $-\infty$



Remarques :

- Si la fonction f peut s'écrire $f(x) = (ax + b) + g(x)$ avec $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$ (resp. $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 0$) alors la droite D d'équation est asymptote à la courbe de f en $+\infty$ (resp. $-\infty$).
- L'étude du signe de $f(x) - (ax + b)$ permet de préciser la position relative de la courbe par rapport à l'asymptote.
Lorsque $f(x) - (ax + b) > 0$ la courbe est de l'asymptote.
Lorsque $f(x) - (ax + b) < 0$ la courbe est de l'asymptote.

Application : Exercice 6 page 208

IV. Opérations sur les limites :

Quand x tend vers a ou vers a^+ ou vers a^- ou vers $+\infty$ ou vers $-\infty$, on a les résultats consignés dans les tableaux suivants :

- **Tableau (T₁)** relatif à la limite d'une **somme** de deux fonctions f et g :

Si f a pour limite	et g a pour limite	alors $f + g$ a pour limite
l	l'	
l	$+\infty$	
l	$-\infty$	
$+\infty$	$+\infty$	
$-\infty$	$-\infty$	
$+\infty$	$-\infty$	

- **Tableau (T₂)** relatif à la limite du **produit** de deux fonctions f et g :

Si f a pour limite	et g a pour limite	alors $f \times g$ a pour limite
l	l'	
$l > 0$	$+\infty$	
$l > 0$	$-\infty$	
$l < 0$	$+\infty$	
$l < 0$	$-\infty$	
$+\infty$	$+\infty$	
$+\infty$	$-\infty$	
$-\infty$	$-\infty$	
0	$+\infty$ ou $-\infty$	

- **Tableau (T₃)** relatif à la limite du **quotient** de deux fonctions f et g :

Si f a pour limite	et g a pour limite	alors $\frac{f}{g}$ a pour limite
l	$l' \neq 0$	
l	$+\infty$	
l	$-\infty$	
$+\infty$	$l' > 0$	
$+\infty$	$l' < 0$	
$-\infty$	$l' > 0$	
$-\infty$	$l' < 0$	
$l > 0$	0 (et $g(x) > 0$)	
$l > 0$	0 (et $g(x) < 0$)	
$l < 0$	0 (et $g(x) > 0$)	
$l < 0$	0 (et $g(x) < 0$)	
0	0	
$+\infty$ ou $-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$	

- **Tableau (T₄)** relatif à la limite d'une **valeur absolue** d'une fonction f :

Si f a pour limite	alors $ f $ a pour limite
l	
$+\infty$	
$-\infty$	

- **Limites de $\sqrt{f}$:**

Théorème (admis)

 $l \in \mathbb{R}$

- ✓ Soit f une fonction définie et positive sur un intervalle ouvert D , sauf peut être en un réel x_0 de D .

a) Si $\lim_{x_0} f = l$ alors $\lim_{x_0} \sqrt{f} = \dots\dots$

b) Si $\lim_{x_0} f = +\infty$ alors $\lim_{x_0} \sqrt{f} = \dots\dots\dots$

- ✓ Soit f une fonction définie et positive sur un intervalle de la forme $]a, +\infty[$ ($a \in \mathbb{R}$)

a) Si $\lim_{+\infty} f = l$ alors $\lim_{+\infty} \sqrt{f} = \dots\dots\dots$

b) Si $\lim_{+\infty} f = +\infty$ alors $\lim_{+\infty} \sqrt{f} = \dots\dots\dots$

- ✓ Soit f une fonction définie et positive sur un intervalle de la forme $] -\infty, a[$ ($a \in \mathbb{R}$)

a) Si $\lim_{-\infty} f = l$ alors $\lim_{-\infty} \sqrt{f} = \dots\dots\dots$

b) Si $\lim_{-\infty} f = +\infty$ alors $\lim_{-\infty} \sqrt{f} = \dots\dots\dots$

- Limites à l'infini d'une fonction polynôme:

Théorème

La limite à l'infini d'une fonction polynôme et la limite à l'infini du

..... c.-à-d. :

Soit f une fonction polynôme de degré $n \in \mathbb{N}^*$: $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$

Alors $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \dots$

- Limites à l'infini d'une fonction rationnelle:

Théorème

La limite à l'infini d'une fonction rationnelle et la limite à l'infini du

..... c.-à-d. :

Soit f une fonction rationnelle : $f(x) = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0}{b_p x^p + b_{p-1} x^{p-1} + \dots + b_2 x^2 + b_1 x + b_0}$ ($a_n \neq 0$ et $b_p \neq 0$)

Alors $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \dots$

Application : Exercices pages 188 ; 189 ; 190 ; 191 et 192

- Autres types de calcul de limite de fonctions:

Activité 5 page 193 :

Application : Exercices 1 et 2 page 193

Activité 6 page 193 :

Application : Exercices 2 page 194

Activité 7 page 194 :