

L'ESSENTIEL DU COURS

* A une fonction sinusoïdale $y(t) = y_m \cdot \sin(\omega t + \varphi_y)$ on associe un vecteur de Fresnel $\vec{V}(a, \varphi)$ de module $a = y_m$ et d'angle polaire $\varphi = \varphi_y$; (φ est l'angle entre l'axe origine des phases $\varphi = 0$ et le vecteur de Fresnel) et tournant dans le sens trigonométrique choisi conventionnellement comme sens positif. Par convention le vecteur de Fresnel est représenté à l'origine des temps ($t_0=0$).

$$y(t) = y_m \cdot \sin(\omega t + \varphi_y) \leftrightarrow \vec{V}(y_m = a, \varphi = \varphi_y).$$

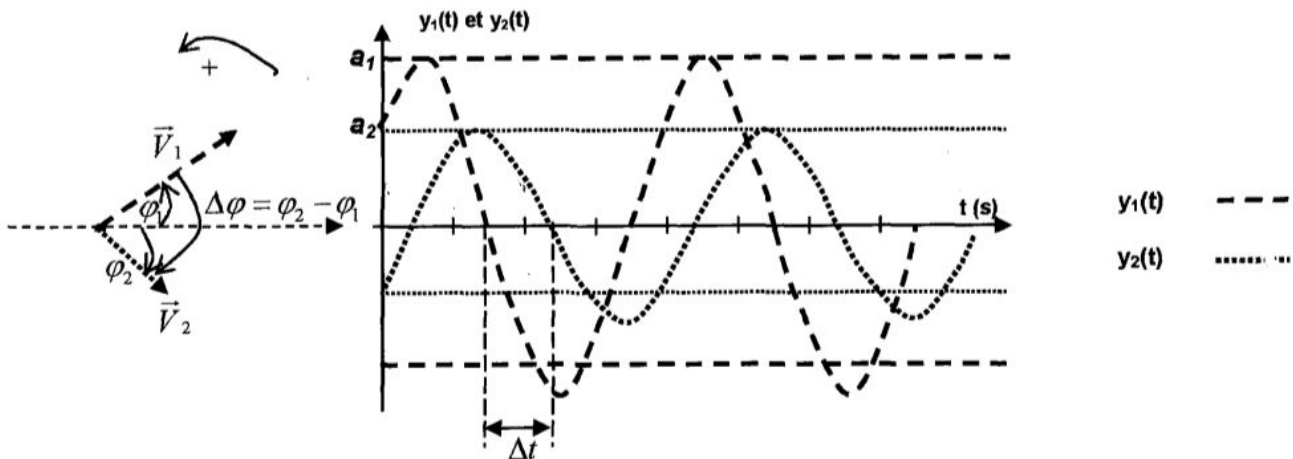
* Deux fonctions sinusoïdales $y_1(t)$ et $y_2(t)$ synchrones varient simultanément avec la même période T.

* Soient les fonctions sinusoïdales suivantes :

$$y_1(t) = a_1 \cdot \sin(\omega t + \varphi_1) \leftrightarrow \vec{V}_1(a_1, \varphi_1) \text{ et } y_2(t) = a_2 \cdot \sin(\omega t + \varphi_2) \leftrightarrow \vec{V}_2(a_2, \varphi_2)$$

* Le déphasage de $y_2(t)$ par rapport à $y_1(t)$ est $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$.

- Si $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 > 0$: $y_2(t)$ est en avance de phase par rapport à $y_1(t)$.
- Si $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 < 0$: $y_2(t)$ est en retard de phase par rapport à $y_1(t)$.
- Si $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = 0$: $y_2(t)$ et $y_1(t)$ sont en phase.

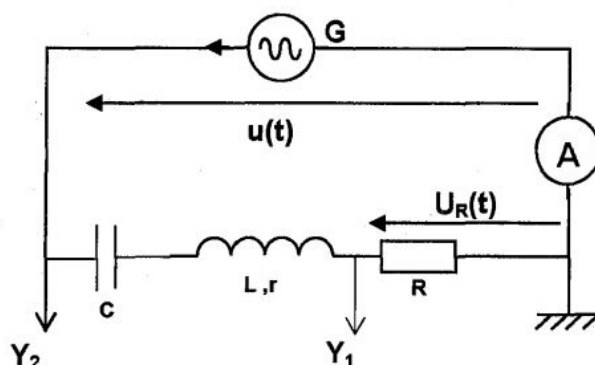


* A tout décalage horaire, Δt , entre deux fonctions sinusoïdales synchrones $y_1(t)$ et $y_2(t)$ représentées dans le même système d'axes est associé un déphasage $\Delta\varphi$ tel que $|\Delta\varphi| = \frac{2\pi}{T} \Delta t$ avec

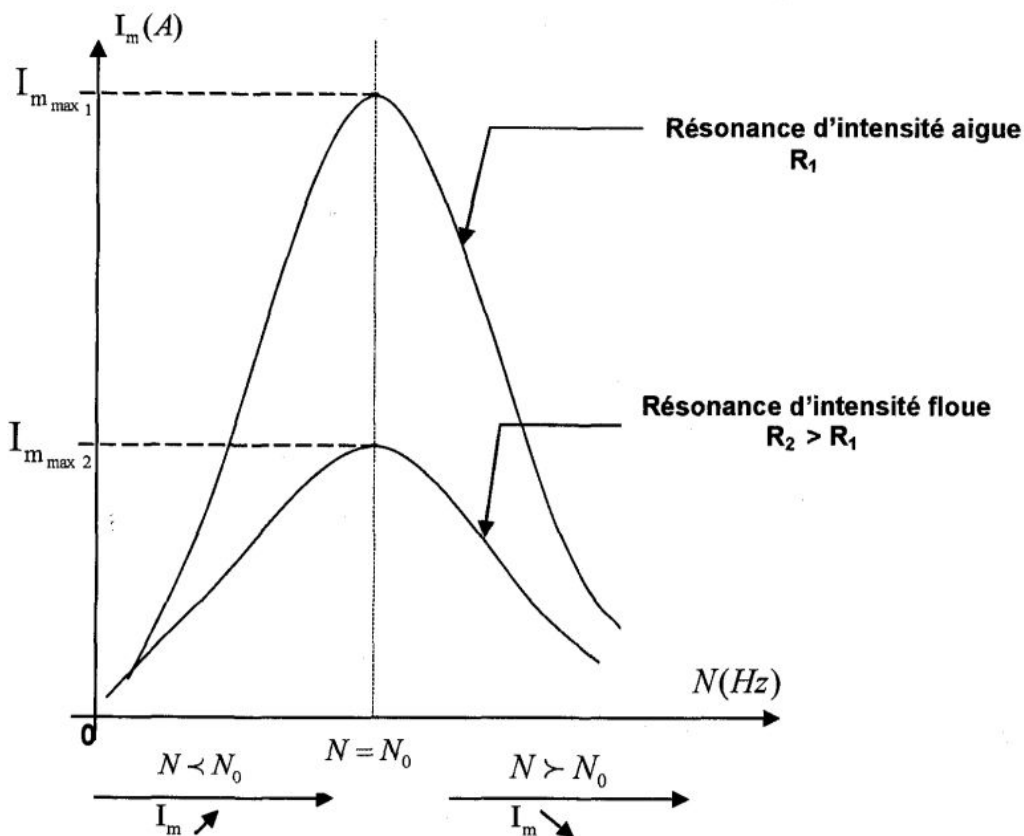
$$\Delta t = \frac{\text{Nombre}_{\text{div}/\Delta t}}{\text{Nombre}_{\text{div}/T}} \cdot T > 0, \text{ tel que : } 0 \leq \Delta t \leq \frac{T}{2} \text{ et } -\pi < \Delta\varphi \leq \pi$$

* Circuit électrique permettant d'étudier les oscillations électriques en régime sinusoïdal forcé :

- Sur la voie Y_1 de l'oscilloscope, on visualise la tension $u_R(t)$ aux bornes du résistor qui renseigne sur l'évolution de l'intensité du courant $i(t)$ car $u_R(t) = R.i(t)$ avec R est une constante positive d'où $u_R(t)$ et $i(t)$ varient proportionnellement et en phase ($\varphi_{u_R} = \varphi_i$).
- Sur la voie Y_2 de l'oscilloscope, on visualise la tension $u(t)$ aux bornes du générateur GBF.



- * La réponse d'un dipôle RLC série à une tension sinusoïdale $u(t)$ est l'établissement d'un courant électrique d'intensité $i(t)$ variant sinusoïdalement au cours du temps avec la fréquence N imposée par l'excitateur (GBF) tel que $i(t) = I_m \cdot \sin(2\pi Nt + \varphi_i)$ avec $N \neq N_0$ et $N_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$.
- * Influence de la fréquence N sur l'amplitude de l'intensité du courant $i(t)$.

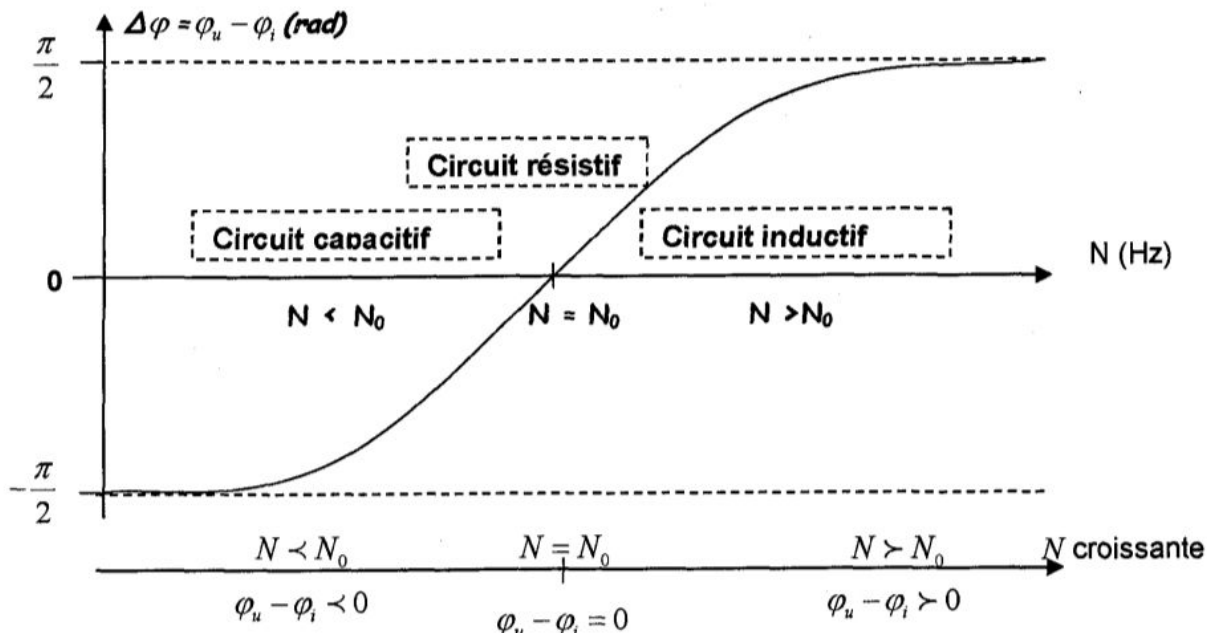


Il s'agit d'un phénomène de résonance d'intensité lorsque I_m atteint une valeur maximale.

La résonance d'intensité est obtenue lorsque $N = N_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$ indépendante de la résistance totale du circuit.

- A la résonance d'intensité et lorsqu'on augmente la résistance totale du circuit $I_{m_{max}}$ diminue.
- La résonance d'intensité est dite aigue lorsque la résistance totale du circuit est relativement faible.
- Lorsque la résistance totale du circuit est relativement importante la résonance d'intensité est dite floue.

* Influence de la fréquence N sur le déphasage $\Delta\varphi = \varphi_u - \varphi_i$:



On note: $-\frac{\pi}{2} < \Delta\varphi = \varphi_u - \varphi_i < \frac{\pi}{2}$

* Equation différentielle vérifiée par $i(t)$:

D'après la loi des mailles :

$$u_B(t) + u_R(t) + u_C(t) - u(t) = 0$$

$$\text{alors } u_B(t) + u_R(t) + u_C(t) = u(t)$$

$$\text{Avec } u_C(t) = \frac{q(t)}{C} = \frac{1}{C} \int i(t) dt$$

$$L \frac{di(t)}{dt} + r i(t) + R i(t) + \frac{q(t)}{C} = u(t) \text{ d'où}$$

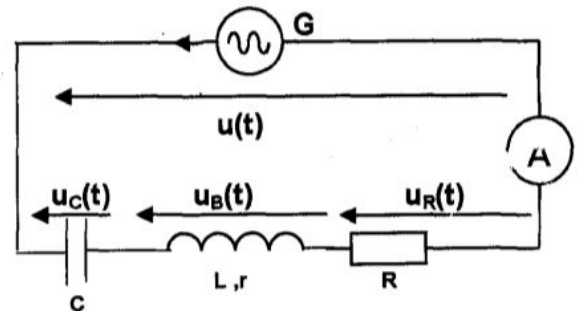
$$L \frac{di(t)}{dt} + (R+r) i(t) + \frac{1}{C} \int i(t) dt = u(t).$$

$$L \frac{di}{dt} + (R+r) i(t) + \frac{1}{C} \int i dt = U_m \sin(\omega t + \varphi_u)$$

Cette équation différentielle admet comme solution $i(t) = I_m \cdot \sin(\omega t + \varphi_i)$.

* Expression de I_m et du déphasage $\Delta\varphi = \varphi_u - \varphi_i$:

$$\begin{aligned} L \frac{di}{dt} + (R+r) i(t) + \frac{1}{C} \int i dt &= U_m \sin(2\pi N t + \varphi_u) \\ \downarrow & \quad \downarrow \quad \downarrow \\ \vec{V}_2 \left(\begin{matrix} L\omega \cdot I_m \\ \varphi_i + \frac{\pi}{2} \end{matrix} \right) + \vec{V}_1 \left(\begin{matrix} (R+r) \cdot I_m \\ \varphi_i \end{matrix} \right) + \vec{V}_3 \left(\begin{matrix} U_{Cm} = \frac{I_m}{C \cdot \omega} \\ \varphi_i - \frac{\pi}{2} \end{matrix} \right) &= \vec{V} \left(\begin{matrix} U_m \\ \varphi_u \end{matrix} \right) \end{aligned}$$

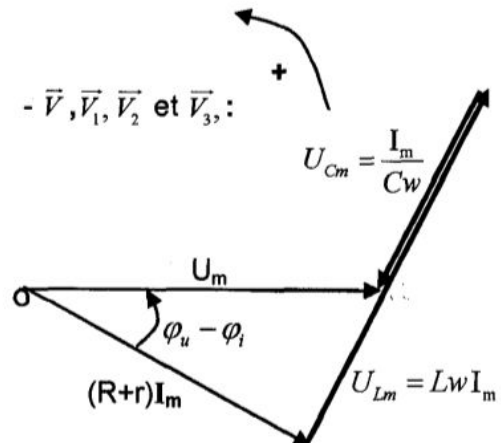
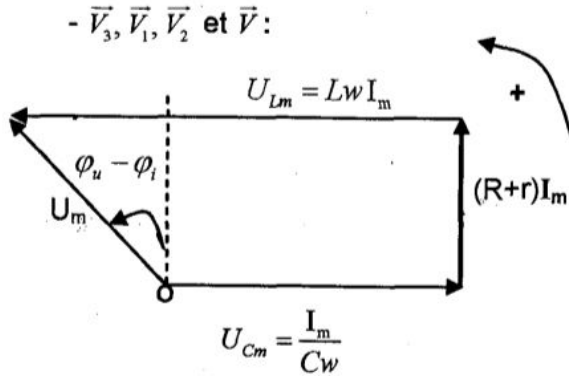
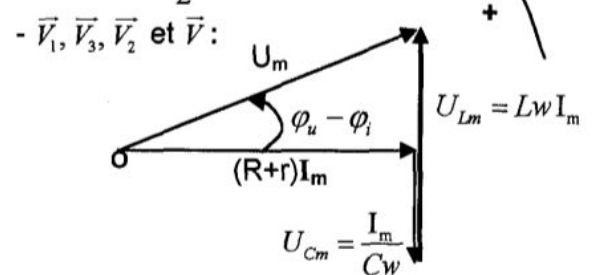
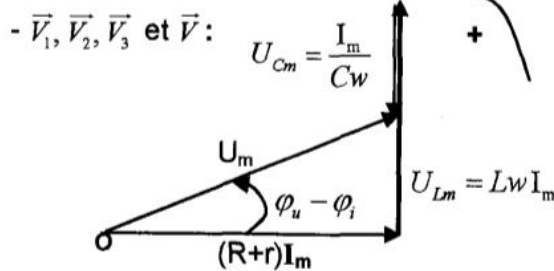


Les vecteurs $\vec{V}_2$ et $\vec{V}_3$ sont parallèles et de sens contraire et perpendiculaire à $\vec{V}_1$ donc la construction de Fresnel est basée sur la comparaison des modules des vecteurs $\vec{V}_2$ et $\vec{V}_3$, on distingue alors trois cas :

- 1^{er} cas : $\omega > \omega_0$, ω_0 étant la pulsation propre de l'oscillateur (L,C) et ω étant la pulsation du générateur.

$\omega^2 > \frac{1}{LC}$ alors $L\omega > \frac{1}{C\omega}$ d'où $L\omega I_m > \frac{I_m}{C\omega}$ et le circuit est inductif.

- Construction de Fresnel dans l'ordre des vecteurs : $0 < \varphi_u - \varphi_i < \frac{\pi}{2}$ (rad).



En appliquant le théorème de Pythagore :
$$I_m = \frac{U_m}{\sqrt{(R+r)^2 + (L\omega - \frac{1}{C\omega})^2}} \quad (1)$$

Avec $\sqrt{(R+r)^2 + (L\omega - \frac{1}{C\omega})^2} = Z$: Impédance électrique du circuit (RLC).

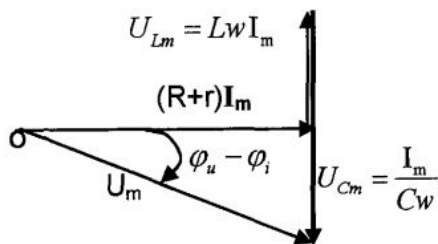
$$\cos(\varphi_u - \varphi_i) = \frac{(R+r)I_m}{U_m} \quad (2) \quad \tan(\varphi_u - \varphi_i) = \frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{R+r} \quad (3) \quad \sin(\varphi_u - \varphi_i) = \frac{L\omega I_m - \frac{I_m}{C\omega}}{U_m} \quad (4)$$

-2^{ème} cas: $\omega < \omega_0$, $-\frac{\pi}{2} < \varphi_u - \varphi_i < 0$ (Rad).

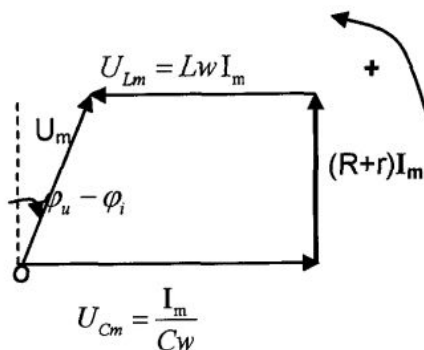
$\omega^2 < \frac{1}{LC}$ alors $L\omega < \frac{1}{C\omega}$ d'où $L\omega I_m < \frac{I_m}{C\omega}$ et le circuit est capacitif.

- Construction de Fresnel dans l'ordre des vecteurs :

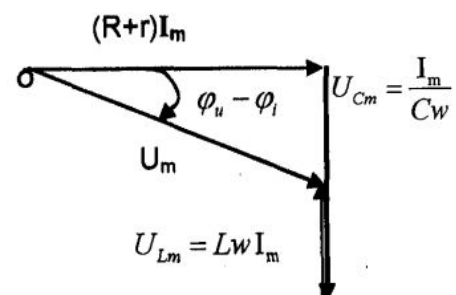
- $\vec{V}_1, \vec{V}_2, \vec{V}_3$ et $\vec{V}$:



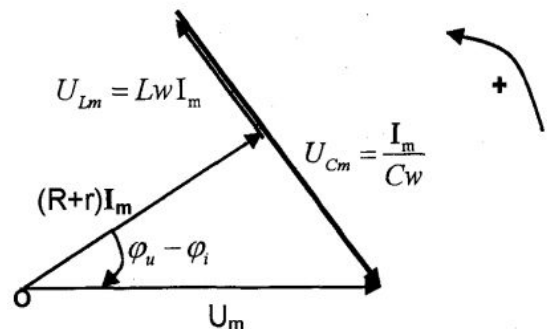
- $\vec{V}_3, \vec{V}_1, \vec{V}_2$ et $\vec{V}$:



- $\vec{V}_1, \vec{V}_3, \vec{V}_2$ et $\vec{V}$:



- $\vec{V}, \vec{V}_1, \vec{V}_2$ et $\vec{V}_3$:



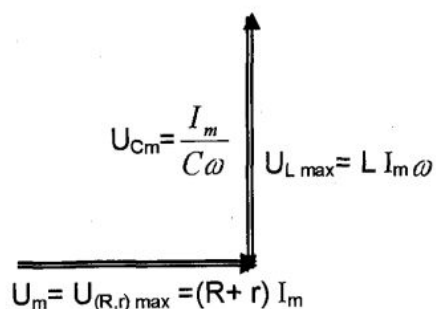
*** Remarques :**

Les expressions (1), (2), (3) et (4) restent valables dans le cas du circuit capacitif.

* 3^{ème} cas : $\omega = \omega_0$ alors $L\omega I_m = \frac{I_m}{C\omega}$ d'où le circuit est en état de résonance d'intensité (circuit résistif)

• $(R+r) I_m = U_m$ alors $I_m = \frac{U_m}{(R+r)}$.

• $\Delta\varphi = \varphi_u - \varphi_i = 0$.



* Les impédances électriques :

$$\bullet Z = \frac{U_m}{I_m} = \frac{U}{I} = \sqrt{(R+r)^2 + (L\omega - \frac{1}{C\omega})^2} \quad (\Omega).$$

$$\bullet Z_C = \frac{U_{Cm}}{I_m} = \frac{U_C}{I} = \frac{1}{C\omega} \quad (\Omega).$$

$$\bullet Z_L = \frac{U_{Lm}}{I_m} = \frac{U_L}{I} = L\omega \quad (\Omega).$$

$$\bullet Z_{\text{Bobine}} = \frac{U_{\text{Bobine } m}}{I_m} = \frac{U_{\text{Bobine}}}{I} = \sqrt{r^2 + (L\omega)^2} \quad (\Omega).$$

$$\bullet Z_{(\text{Bobine}, C)} = Z_{AB} = \frac{U_{ABm}}{I_m} = \frac{U_{AB}}{I} = \sqrt{r^2 + (L\omega - \frac{1}{C\omega})^2} \quad (\Omega).$$

* A la résonance d'intensité, on définit, Q, le coefficient de surtension comme étant le quotient de la tension efficace U_c aux bornes du condensateur par la tension efficace U aux bornes du générateur.

$$\bullet Q = \frac{U_c}{U} = \frac{U_{Cm}}{U_m} \quad (\text{sans unité}).$$

$$\bullet \text{ A la résonance d'intensité on a : } L\omega_0 = \frac{1}{C\omega_0} \text{ alors } Z_L = Z_C \text{ d'où } U_L = U_C.$$

$$Q = \frac{U_L}{U} = \frac{U_{Lm}}{U_m} = \frac{L\omega_0}{R+r} = \frac{1}{C\omega_0(R+r)} = \frac{1}{R+r} \sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{Z_L}{Z_{R+r}} = \frac{Z_C}{Z_{R+r}}.$$

• Si $Q > 1$ alors il y a phénomène de surtension.

• Si $Q < 1$ alors pas de phénomène de surtension.

* **Remarque :**

Si la résistance totale $R+r$ du circuit augmente alors le coefficient de surtension Q diminue.

* La puissance électrique moyenne consommée par le résonateur RLC :

$$\bullet P_{\text{moy}} = \frac{U_m I_m}{2} \cos(\varphi_u - \varphi_i) = UI \cos(\varphi_u - \varphi_i) = (R+r) \frac{I_m^2}{2} = (R+r) I^2.$$

• $\cos(\varphi_u - \varphi_i)$: Facteur de puissance.

$$\bullet P_{\text{moy}} = \frac{E_{\text{moy}}}{\Delta t} \quad \begin{array}{c} \xrightarrow{\text{J}} \\ \xrightarrow{\text{s}} \end{array} \quad E_{\text{moy}} : \text{Energie électrique moyenne consommée par le résonateur RLC.}$$

↓
W

* A la résonance de puissance électrique on a P_{moy} est maximale

alors $P_{\text{moy}} = (R+r) \frac{I_m^2}{2}$ est max d'où la résonance d'intensité.

* Propriétés d'un circuit RLC série en état de résonance d'intensité

• I_m , I , U_{Rm} et U_R sont maximales.

• $\omega = \omega_0$ alors $N = N_0$.

• $L\omega_0 = \frac{1}{C\omega_0}$ alors $Z_L = Z_C$ d'où $U_L = U_C$.

• $Z = Z_{\min} = Z_{R+r} = R+r$.

• $U_m = (R+r) I_m$ alors $U = (R+r) I$.

• $\Delta\varphi = \varphi_u - \varphi_i = 0$.

• $u_L(t) = -u_C(t)$, car $U_{Lm} = U_{Cm}$ et $\varphi_{u_L} = \varphi_C + \pi$

alors $u_L(t) + u_C(t) = 0$ d'où le circuit RLC se comporte comme un dipôle LC.

• L'énergie électromagnétique emmagasinée dans le circuit est constante puisque $E_T = \frac{1}{2} C u_C^2 + \frac{1}{2} L i^2$

alors $\frac{dE_T}{dt} = C \cdot u_C \cdot \frac{du_C}{dt} + L \cdot i \cdot \frac{di}{dt} = u_C \cdot i + L \cdot i \cdot \frac{di}{dt} = i \cdot (u_C + L \cdot \frac{di}{dt})$ or $u_C + L \cdot \frac{di}{dt} = -(R+r) \cdot i + u(t) = 0$

d'où $\frac{dE}{dt} = 0$ alors l'énergie totale E_T est constante au cours du temps.

• $P_{\text{moy}} = \frac{U^2}{R+r}$.

* Par variation de la fréquence N du GBF, ω , I_m , U_{Rm} , U_{Cm} , U_{Lm} , Z_C , Z_L , Z ...etc varient alors que U_m et φ_u restent constantes.

* Identification des courbes.

• $u_R(t)$ et $u(t)$:

$$U_{Rm} = Z_R I_m = R I_m \text{ et } U_m = Z I_m = \sqrt{(R+r)^2 + (L\omega - \frac{1}{C\omega})^2} I_m \text{ or } Z > Z_R \text{ donc } U_m > U_{Rm} \text{ lorsque } r \neq 0$$

d'où la courbe ayant l'amplitude la plus grande représente $u(t)$.

N.B : A la résonance d'intensité et lorsque $r=0$ (bobine purement inductive), on obtient $U_m = U_{Rm}$.

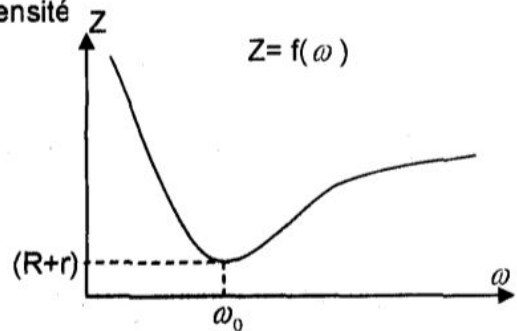
• $u_D(t)$ et $u(t)$, avec D est un dipôle formé par une bobine (L, r) et un condensateur

$$U_{Dm} = Z_D I_m = \sqrt{r^2 + (L\omega - \frac{1}{C\omega})^2} I_m \text{ et } U_m = Z I_m = \sqrt{(R+r)^2 + (L\omega - \frac{1}{C\omega})^2} I_m \text{ or } Z > Z_D \text{ alors}$$

$U_m > U_{Dm}$ d'où la courbe ayant l'amplitude la plus grande représente $u(t)$.

N.B : A la résonance d'intensité, on obtient $u(t) = (R+r) i(t)$ et $u_D(t) = r i(t)$ car $L\omega - \frac{1}{C\omega} = 0$ donc

$u_D(t)$ et $u(t)$ sont en phase ($\varphi_D = \varphi_u$) puisque $u(t)$ et $u_D(t)$ sont en phase avec $i(t)$.



- $u_C(t)$ et $u(t)$:

On a : $-\frac{\pi}{2} < \varphi_u - \varphi_i < \frac{\pi}{2}$ puisque $\cos(\varphi_u - \varphi_i) = \frac{R+r}{Z} > 0$ or $i(t) = \frac{dq}{dt} = C \frac{du_C}{dt}$ puisque $q = C u_C$

et $C > 0$ d'où $\varphi_i = \varphi_{u_C} + \frac{\pi}{2}$ alors $-\frac{\pi}{2} < \varphi_u - \varphi_{u_C} - \frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{2}$ alors $0 < \varphi_u - \varphi_{u_C} < \pi$ d'où $u(t)$ est toujours en avance de phase par rapport à $u_C(t)$.

N.B : A la résonance d'intensité on a $\varphi_u - \varphi_i = 0$ alors $\varphi_u - \varphi_{u_C} = \frac{\pi}{2}$ d'où $u(t)$ est en quadrature avance de phase par rapport à $u_C(t)$.

- $u_L(t)$ et $u(t)$:

On a : $-\frac{\pi}{2} < \varphi_u - \varphi_i < \frac{\pi}{2}$ puisque $\cos(\varphi_u - \varphi_i) = \frac{R+r}{Z} > 0$ or $u_L(t) = L \frac{di}{dt}$ puisque $L > 0$ d'où

$\varphi_i = \varphi_{u_L} - \frac{\pi}{2}$ alors $-\frac{\pi}{2} < \varphi_u - \varphi_{u_L} + \frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{2}$ alors $-\pi < \varphi_u - \varphi_{u_L} < 0$ d'où $u(t)$ est toujours en retard de phase par rapport à $u_L(t)$.

N.B : A la résonance d'intensité on a $\varphi_u - \varphi_i = 0$ alors $\varphi_u - \varphi_{u_L} = -\frac{\pi}{2}$ d'où $u(t)$ est en quadrature retard de phase par rapport à $u_L(t)$.

- $u_{\text{Bobine}}(t)$ et $u(t)$:

$$u_{\text{Bobine}}(t) = L \frac{di}{dt} + ri \text{ alors } \vec{V} (U_{\text{Bobine max}} ; \varphi_{\text{Bobine}}) = \vec{V}_1 (U_{r \text{ max}} = r I_m ; \varphi_i) + \vec{V}_2 (U_{L \text{ max}} = L I_m \omega ; \varphi_i + \frac{\pi}{2})$$

D'après la construction de Fresnel on a :

$$\cos(\varphi_{u_{\text{Bobine}}} - \varphi_i) > 0 \text{ et } \sin(\varphi_{u_{\text{Bobine}}} - \varphi_i) > 0$$

alors $0 < \varphi_{u_{\text{Bobine}}} - \varphi_i < \frac{\pi}{2}$ et puisque

$$\text{tg}(\varphi_{u_{\text{Bobine}}} - \varphi_i) = \frac{L\omega}{r} \text{ et } \text{tg}(\varphi_u - \varphi_i) = \frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{R+r}$$

On a : $\frac{L\omega}{r} > \frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{R+r}$ d'où $\text{tg}(\varphi_{u_{\text{Bobine}}} - \varphi_i) > \text{tg}(\varphi_u - \varphi_i)$ puisque pour tout angle $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$

$\text{tg} \alpha$ augmente lorsque α augmente.

$\varphi_{u_{\text{Bobine}}} - \varphi_i > \varphi_u - \varphi_i$ d'où $\varphi_{\text{Bobine}} - \varphi_u > 0$ alors $u_{\text{Bobine}}(t)$ est toujours en avance de phase par rapport $u(t)$.

* **Remarque :** $Z \neq Z_L + Z_C + Z_R + Z_r$ mais à la résonance d'intensité $Z = Z_R + Z_r$.

