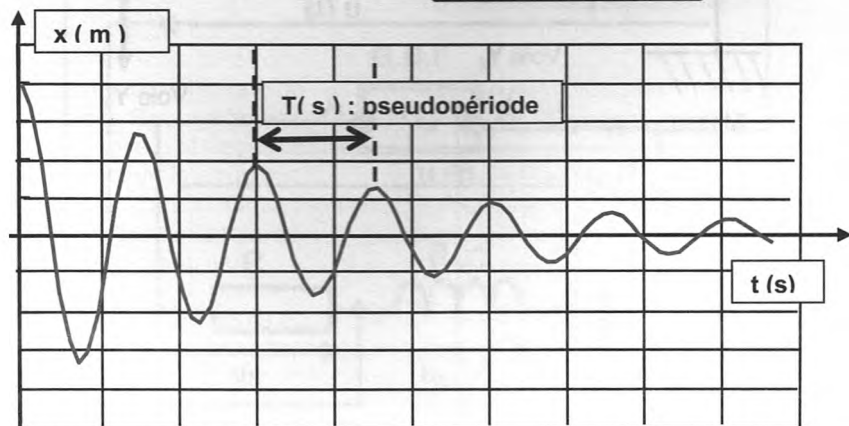
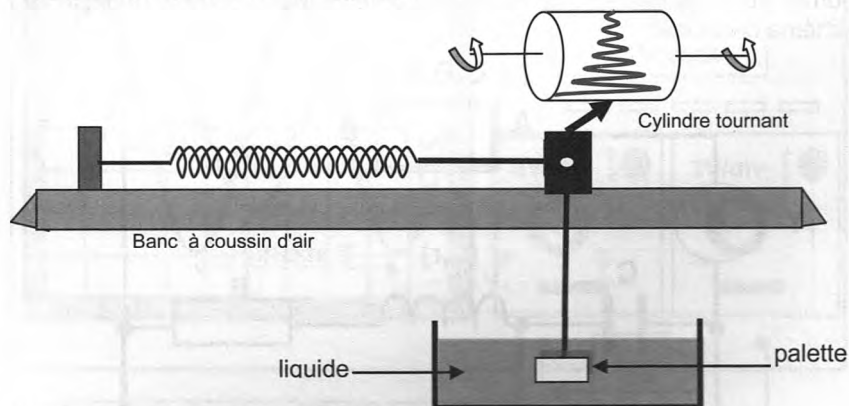


® Dispositif expérimental et expérience

► En présence des frottements du type visqueux $\vec{f} = -h\vec{v}$, les oscillations libres du pendule élastique sont amorties.

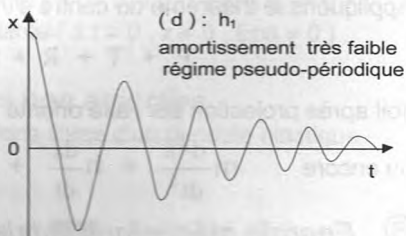
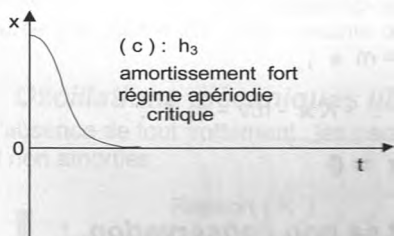
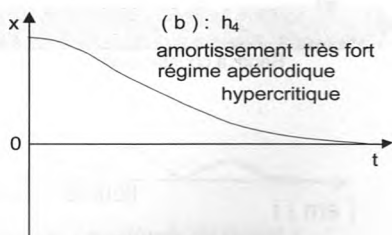
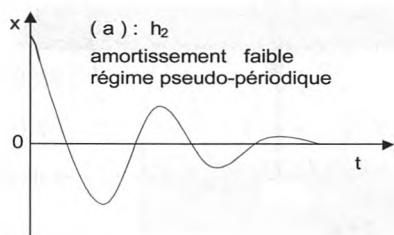
Selon l'importance de l'amortissement, le régime oscillatoire peut être :

- * pseudopériodique (amortissement faible),
- * apériodique (amortissement fort).



® Différents types d'amortissement

Lorsqu'on fait augmenter le coefficient de frottement h , l'amortissement devient de plus en plus important et l'oscillateur oscille de moins en moins.

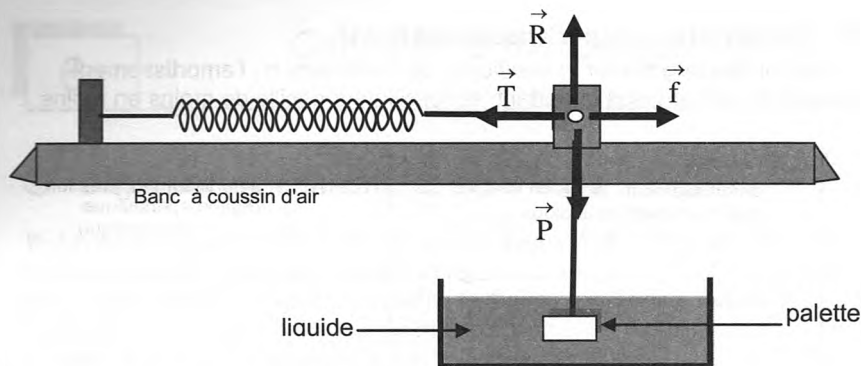


- * la courbe (d) correspond à h_1 : l'amortissement est très faible et le régime oscillatoire est **pseudo-périodique** ;
- * la courbe (a) correspond à h_2 : l'amortissement est faible et le régime oscillatoire est **pseudo-périodique** ;
- * la courbe (c) correspond à h_3 : l'amortissement est fort et le régime oscillatoire est **apériodique** ; ce diagramme correspond au retour le plus rapide du solide (S) vers son état d'équilibre : c'est le régime **critique** .
- * la courbe (b) correspond à h_4 : l'amortissement est très fort et le régime oscillatoire est **apériodique** ; ce diagramme correspond au retour le plus lent du solide (S) vers son état d'équilibre : c'est le régime **hypercritique** .

Pour faire varier h on modifie la nature du liquide ou bien on garde un même liquide et on fait modifier la surface de la palette immergée dans ce liquide .

® Equation différentielle du mouvement de G .

Dans ces conditions , le solide (S) est soumis à quatre force : son poids $\vec{P}$, la tension $\vec{T}$ du ressort , la réaction $\vec{R}$ de la tige et la force de frottement visqueux $\vec{f}$ du liquide .



Appliquons le théorème du centre d'inertie. au solide (S) :

$$\vec{P} + \vec{T} + \vec{R} + \vec{f} = m \vec{a} ;$$

soit après projection sur l'axe orienté $\vec{x}'x$: $-Kx - h.v = m a$;

ou encore : $m \frac{d^2x}{dt^2} + h \frac{dx}{dt} + Kx = 0$.

® **Energie mécanique totale et sa non conservation :**

A une date t quelconque , l'énergie mécanique totale du pendule élastique

(solide + ressort) est à tout instant : $E = \frac{1}{2} Kx^2 + \frac{1}{2} mv^2$.

Justifions la non conservation de l'énergie mécanique E du système :

Dérivons l'énergie mécanique E par rapport au temps , soit :

$$\frac{dE}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} Kx^2 + \frac{1}{2} mv^2 \right) = K.x. \frac{dx}{dt} + m. \frac{dx}{dt} \cdot \frac{d^2x}{dt^2} ;$$

ou encore : $\frac{dE}{dt} = \frac{dx}{dt} \left[m. \frac{d^2x}{dt^2} + K.x. \right] ;$

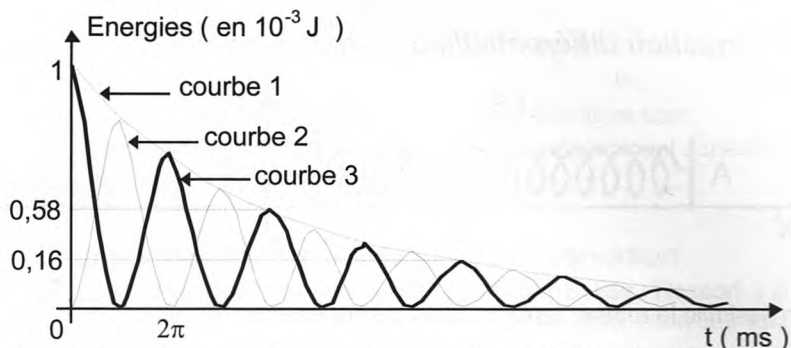
or d'après l'équation différentielle , on a : $m. \frac{d^2x}{dt^2} + K.x = -h \frac{dx}{dt} ;$

d'où : $\frac{dE}{dt} = \frac{dx}{dt} \cdot \left(-h \frac{dx}{dt} \right) = -h \left(\frac{dx}{dt} \right)^2$, ou bien : $\frac{dE}{dt} = -h v^2$.

On constate bien que $\frac{dE}{dt} < 0$, ce qui signifie que E décroît au cours du

temps : le système { pendule , liquide } n'est pas conservatif (dissipatif) .

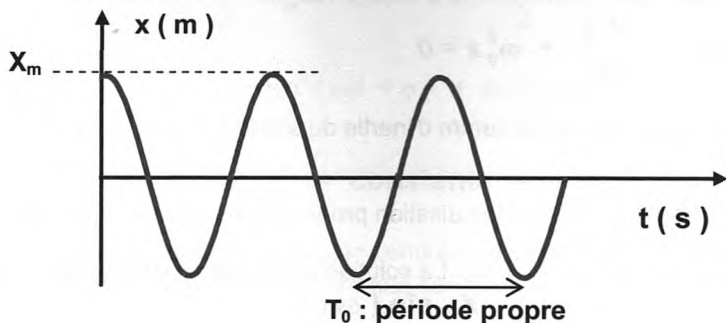
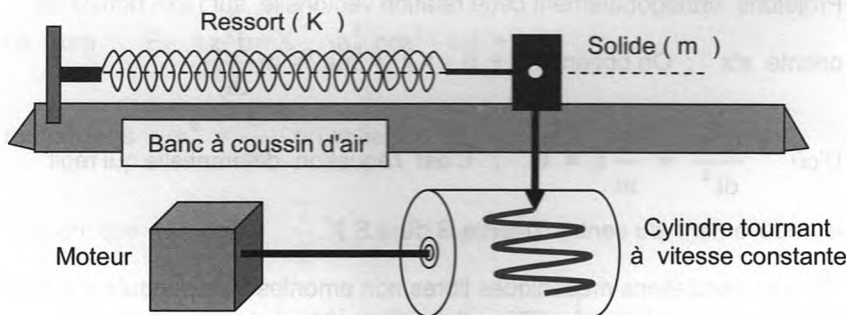
Les courbes de variation de E , de E_C et de E_p en fonction du temps sont données sur la figure ci-dessous :



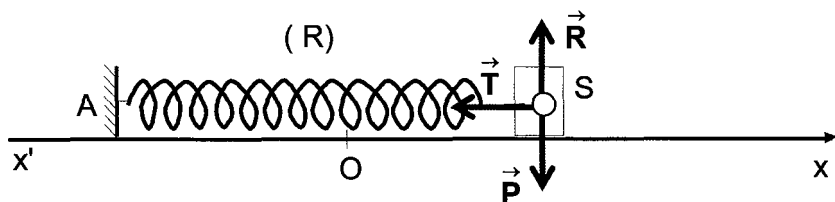
- * courbe (1) : $E = f(t)$: strictement décroissante (système dissipatif) ,
- * courbe (2) : $E_c = f(t)$: décroissante oscillante (à $t = 0$, $v = 0$, donc $E_c = 0$),
- * courbe (3) : $E_{pe} = f(t)$: décroissante oscillante (à $t = 0$, $x \neq 0$, $E_{pe} \neq 0$) .

® Oscillations mécaniques libres non amorties

En l'absence de tout frottement , les oscillations libres d'un pendule élastique sont non amorties .



® Equation différentielle du mouvement de G



On assimile le repère terrestre à un repère galiléen .

Dans ce repère le théorème du centre d'inertie appliqué au solide (S)

s'écrit : $\sum \vec{F}_{\text{ext.}} = m \cdot \vec{a}$,

Les forces appliquées , en G , sont le poids $\vec{P}$ du solide (S) , la réaction $\vec{R}$ du plan horizontal et la tension $\vec{T}$ du fil , soit : $\vec{P} + \vec{R} + \vec{T} = m \cdot \vec{a}$.

Projetons orthogonalement cette relation vectorielle sur l'axe horizontal

orienté $x'x$: On obtient : $0 + 0 - k \cdot x = ma = m \frac{d^2x}{dt^2}$.

D'où : $\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0$: C'est l'équation différentielle qui régit

le mouvement du centre d'inertie G de (S) .

® Les oscillations mécaniques libres non amorties d'un pendule élastique sont régies par l'équation différentielle de second ordre et sans second

membre : $\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0$

où x est l'élongation du centre d'inertie du solide (S) et $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$

avec : $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ est la pulsation propre de l'oscillateur (pendule élastique) libre non amorti . La solution de l'équation différentielle est de la forme : $x = X_m \sin (\omega_0 t + \varphi)$,

► Les oscillations libres non amorties d'un pendule élastique sont

périodiques et sinusoïdales de période propre : $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$

► Si les oscillations libres amorties d'un pendule élastique sont pseudopériodiques alors la **pseudopériode T** est légèrement supérieure à la **période propre T₀** de l'oscillateur libre non amorti .

® **Energie mécanique totale et sa conservation**

Par définition , l'énergie mécanique E du système { Solide , Ressort } à un instant t est égale à la somme de l'énergie potentielle élastique Ep_e

et de l'énergie cinétique E_c du système : $E = Ep_e + E_c$.

Soit : $E = \frac{1}{2} kx^2 + \frac{1}{2} mv^2$, c'est-à-dire : $E = \frac{1}{2} k(\Delta L)^2 + \frac{1}{2} mv^2$,

avec $\Delta L = x$. Comme : $v = \frac{dx}{dt} = X_m \cdot \omega_0 \cdot \cos(\omega_0 t + \varphi)$,

on aura : $E_c = \frac{1}{2} m X_m^2 \cdot \omega_0^2 \cdot \cos^2(\omega_0 t + \varphi)$

remplaçons : $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$, on obtient : $E_c = \frac{1}{2} k X_m^2 \cos^2(\omega_0 t + \varphi)$

sachant que : $Ep_e = \frac{1}{2} X_m^2 \cdot \sin^2(\omega_0 t + \varphi)$

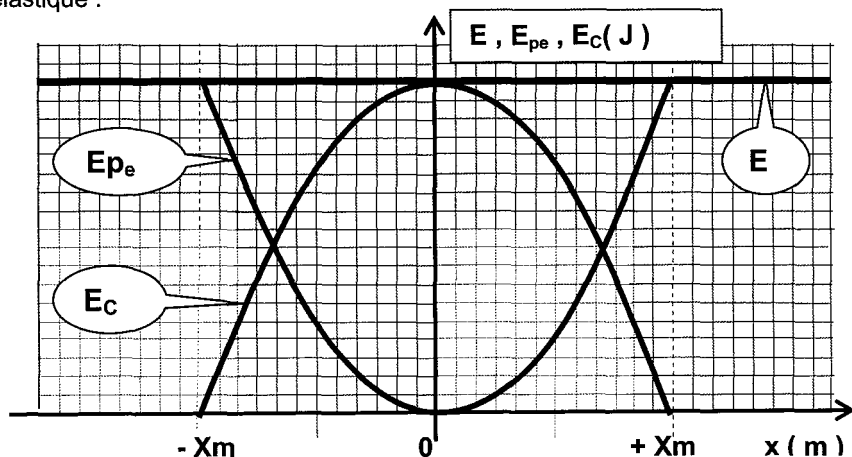
on obtient enfin : $E = \frac{1}{2} k X_m^2 \sin^2(\omega_0 t + \varphi) + \frac{1}{2} k X_m^2 \cos^2(\omega_0 t + \varphi)$,

soit : $E = \frac{1}{2} k X_m^2 [\sin^2(\omega_0 t + \varphi) + \cos^2(\omega_0 t + \varphi)]$,

finalement : $E = \frac{1}{2} k X_m^2 = \text{constante} = \frac{1}{2} m V_m^2$

► En l'absence de tout frottement , le pendule élastique oscillant est un système **conservatif** c'est-à-dire que son énergie mécanique est constante au cours du temps .

► Les oscillations libres non amorties d'un pendule élastique résultent des **transformations mutuelles** d'énergie cinétique et d'énergie potentielle élastique .



ANALOGIE ENTRE OSCILLATEUR ELECTRIQUE LIBRE ET OSCILLATEUR MECANIQUE LIBRE

Oscillateur	circuit RLC série	pendule élastique
Grandeurs oscillantes	charge électrique q intensité $i = \frac{dq}{dt}$	abscisse x vitesse $v = \frac{dx}{dt}$
Grandeurs caractéristiques	inductance L capacitance $1/C$ résistance R	masse m raideur k coef. de frottement h
période propre	$T_0 = 2\pi \sqrt{LC}$	$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$
Energie totale	$E_e = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C} + \frac{1}{2} Li^2$ $= \frac{1}{2} Cu_c^2 + \frac{1}{2} Li^2$	$E_m = \frac{1}{2} Kx^2 + \frac{1}{2} mv^2$