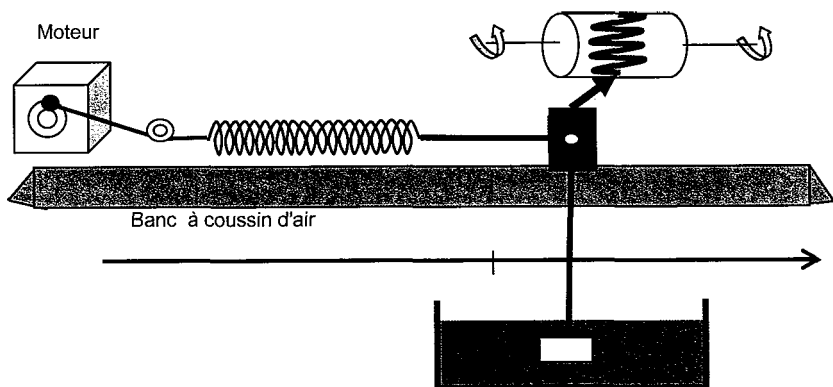


® Dispositif expérimental et expérience

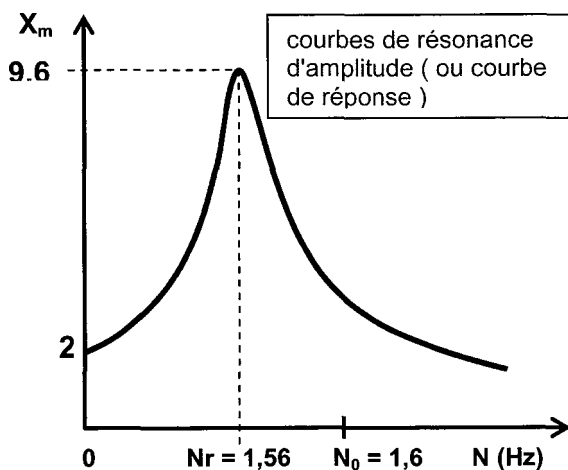
► En régime sinusoïdal forcé, le dispositif d'entretien des oscillations d'un pendule élastique constitue l'excitateur tandis que le pendule élastique constitue le résonateur (Le liquide contenu dans la cuve constitue l'amortisseur).



► La fréquence des oscillations forcées du pendule élastique est imposée par l'excitateur (moteur).

Faisons varier la fréquence N du moteur et mesurons à chaque fois l'amplitude X_m des oscillations du pendule. On trace ensuite la courbe de résonance d'amplitude :

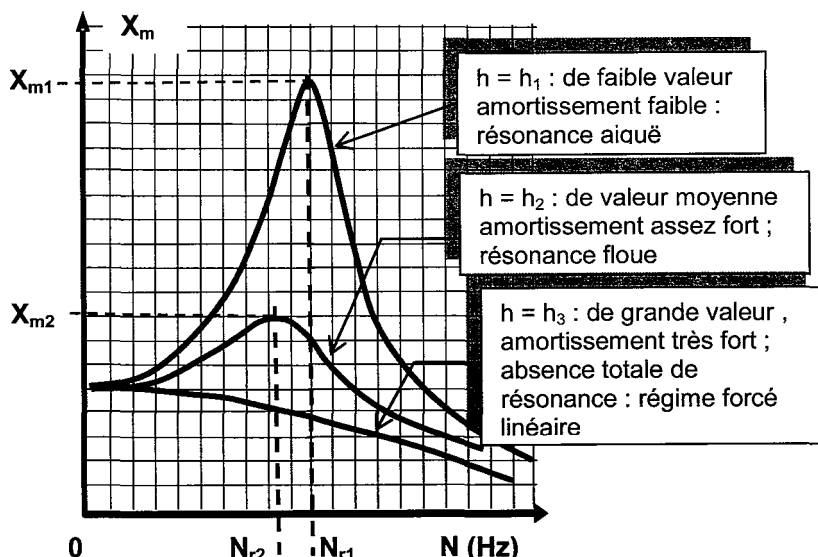
$$X_m = f(N)$$



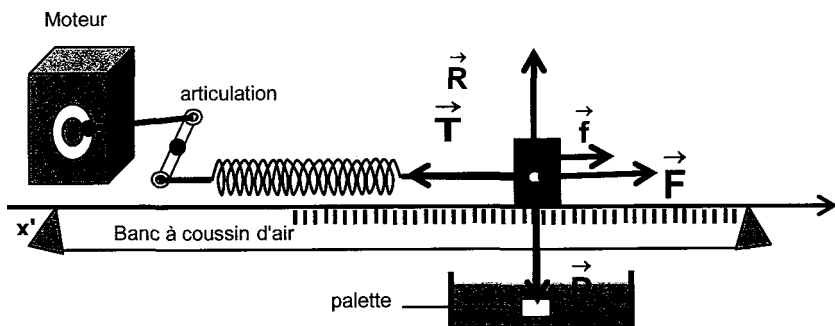
La résonance d'amplitude X_m signifie que X_m passe par sa plus grande valeur possible et ceci pour une fréquence excitatrice particulière N_r appelée **fréquence de résonance d'amplitude**.

On constate que $N_r < N_0$.

® **Influence du coefficient de frottement h sur la résonance d'amplitude**



® **Equation différentielle régissant la variation de l'abscisse $x(t)$ du centre d'inertie G du solide .**



Appliquons le théorème du centre d'inertie au solide (S) :

$$\vec{P} + \vec{R} + \vec{T} + \vec{f} + \vec{F} = m \vec{a} ,$$

Projetons sur l'axe orienté $\vec{x} \cdot \vec{x}$, on obtient : $0 + 0 + T + f + F = ma$;
Soit : $-Kx - h\dot{x} + F = ma$; ou encore :

$$-Kx - h \frac{dx}{dt} + F(t) = m \frac{d^2x}{dt^2} .$$

Enfin , en présence de frottements visqueux , les oscillations sinusoïdales forcées d'un pendule élastique sont régies par l'équation différentielle :

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + h \frac{dx}{dt} + kx = F(t)$$

Avec $F(t) = F_m \sin(\omega t + \varphi_F)$, valeur algébrique de la force excitatrice .

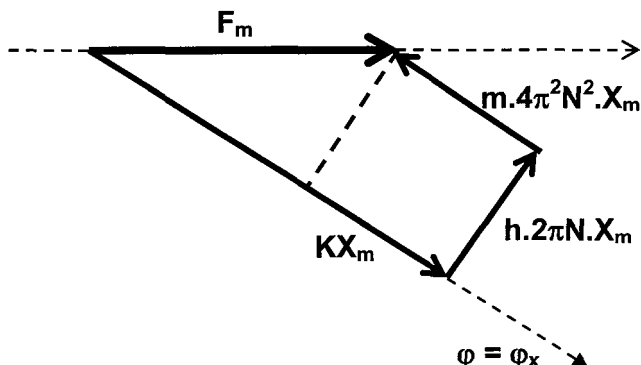
⑧ Résolution de l'équation par la méthode de construction de Fresnel .

Si : $x(t) = X_m \sin(2\pi Nt + \varphi_x)$, alors pour chacun des termes de l'équation différentielle précédente correspond un vecteur de Fresnel dont les caractéristiques sont indiquées ci-dessous :

• $K.x = K. X_m \sin(2\pi Nt + \varphi_x) \Rightarrow \vec{U}_1$ ($\|\vec{U}_1\| = KX_m$; $\varphi_1 = \varphi_x$)

• $h \frac{dx}{dt} = h\omega X_m \sin(2\pi Nt + \varphi_x + \frac{\pi}{2}) \Rightarrow \vec{U}_2$

($\|\vec{U}_2\| = h\omega X_m$; $\varphi_2 = \varphi_x + \frac{\pi}{2}$)



$$\bullet \quad m \frac{d^2 x}{dt^2} = m \omega^2 X_m \cdot \sin(2\pi N t + \varphi_x + \pi) \rightarrow \vec{U}_3$$

$$(\|\vec{U}_3\| = m \omega^2 X_m ; \varphi_3 = \varphi_x + \pi)$$

$$\bullet \quad F(t) = F_m \sin 2\pi N t \rightarrow \vec{U} (\|\vec{U}\| = F_m ; \varphi = 0).$$

Pour exprimer l'amplitude X_m de l'élongation $x(t)$, on applique la relation de Pythagore : $F_m^2 = (h \cdot 2\pi N \cdot X_m)^2 + (K \cdot X_m - m \cdot 4\pi^2 \cdot N^2 X_m)^2$,

$$\text{Ce qui donne : } F_m^2 = X_m^2 [(h \cdot 2\pi N)^2 + (K - m \cdot 4\pi^2 N^2)^2]$$

D'où :

$$X_m = \frac{F_m}{\sqrt{h^2 \omega^2 + (k - m \omega^2)^2}} = \frac{F_m}{\sqrt{4h^2 \pi^2 N^2 + (k - 4m \pi^2 N^2)^2}}.$$

D'après la construction de Fresnel, on détermine : le déphasage entre $x(t)$

$$\text{et } F(t) \text{ par la tangente : } \operatorname{tg}(\varphi_F - \varphi_x) = \frac{h \omega_e}{K - m \omega_e^2},$$

$$\text{si } \omega_e = 0, \text{ alors : } \operatorname{tg}(\varphi_F - \varphi_x) = 0^+ \Rightarrow (\varphi_F - \varphi_x) = 0;$$

$$\text{si } \omega_e \rightarrow \infty, \text{ alors : } \operatorname{tg}(\varphi_F - \varphi_x) \rightarrow 0^- \Rightarrow (\varphi_F - \varphi_x) \rightarrow \pi;$$

@ Donc, pour $\forall \omega_e$, on a : $0 \leq \varphi_F - \varphi_x \leq \pi$, ce qui signifie que $x(t)$ est toujours en retard de phase par rapport à $F(t)$.

Justification de l'allure de la courbe de résonance obtenue expérimentalement :

$$\text{D'après l'expression : } X_m = \frac{F_{\max}}{\sqrt{(2\pi N \cdot h)^2 + [k - m(2\pi N)^2]^2}} = f(N).$$

$$* \text{ Si } N \rightarrow 0, \text{ alors : } X_m \rightarrow \frac{F_m}{k}.$$

$$* \text{ Si } N \rightarrow \infty, \text{ alors : } X_m \rightarrow 0.$$

$$* \text{ Puis } X_m \text{ est maximale pour la fréquence } N_r \text{ telle que : } \frac{dX_m}{dN} = 0,$$

Ce qui nous permet d'obtenir l'expression de la fréquence de résonance d'amplitude :

$$N_r^2 = N_0^2 - \frac{h^2}{8\pi^2 m^2} \quad , \quad \text{soit :} \quad N_r = \sqrt{N_0^2 - \frac{h^2}{8\pi^2 m^2}} \quad .$$

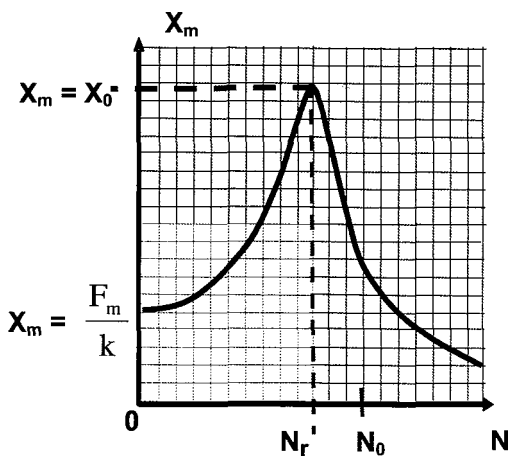
L'allure de la courbe :
 $X_m = f(N)$ est donnée
 sur la figure ci-contre :

► En régime sinusoïdal forcé , la résonance d'élongation se produit à la fréquence de l'excitateur :

$$N_r = \sqrt{N_0^2 - \frac{h^2}{8\pi^2 m^2}} \quad .$$

► La résonance est d'autant plus aiguë que l'amortissement est plus faible .

► Dans le cas d'un amortissement important , la résonance est floue .



Lorsque h dépasse la valeur limite : $h_L = m\omega_0\sqrt{2} = \sqrt{2mK}$
 alors la résonance disparaît et devient impossible .

® *Energie et puissance mécanique moyenne :*

L'échange d'énergie s'effectue de l'excitateur vers l'oscillateur , car ce dernier perd lentement son énergie à cause du frottement et par conséquent l'excitateur lui fournit continuellement de l'énergie pour qu'il puisse osciller sans arrêt .

► En régime sinusoïdal forcé , la puissance mécanique moyenne est

donnée par la relation : $P = \frac{F_m \cdot V_m}{2} \cos(\varphi_F - \varphi_v) \quad ,$

soit aussi : $P = \frac{1}{2} h \cdot V_m^2 \quad .$

Analogies électro-mécaniques

Oscillateur électrique	Oscillateur mécanique
$I_m = \frac{U_m}{Z}$ où : $Z = \sqrt{R_T^2 + (L\omega - \frac{1}{C\omega})^2}$ Z : impédance électrique $\text{tg}(\varphi_u - \varphi_i) = \frac{L\omega - \frac{1}{C\omega}}{R_T}$ $P = \frac{U_m \cdot I_m}{2} \cos(\varphi_u - \varphi_i)$ Puissance moyenne , soit aussi : $P = R_T \cdot \frac{I_m^2}{2}$	$V_m = \frac{F_m}{Z}$ où : $Z = \sqrt{h^2 + (m\omega - \frac{k}{\omega})^2}$ Z : impédance mécanique $\text{tg}(\varphi_F - \varphi_v) = \frac{m\omega - \frac{k}{\omega}}{h}$ $P = \frac{F_m \cdot V_m}{2} \cos(\varphi_F - \varphi_v)$ Puissance moyenne , soit aussi : $P = h \cdot \frac{V_m^2}{2}$
Résonance d'intensité : $N = N_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$ $Z = Z_{\min} = R_T ; I_m = \frac{U_m}{R_T}$	Résonance de vitesse : $N = N_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}$ $Z = Z_{\min} = h ; V_m = \frac{F_m}{h}$
$Q_m = \frac{U_m}{\sqrt{R_T^2 \omega^2 + (\frac{1}{C} - L\omega^2)^2}}$ $\text{tg}(\varphi_u - \varphi_q) = \frac{R_T \omega_e}{\frac{1}{C} - L\omega_e^2}$ u(t) toujours en avance de phase sur q (t) .	$X_m = \frac{F_m}{\sqrt{h^2 \omega^2 + (k - m\omega^2)^2}}$ $\text{tg}(\varphi_F - \varphi_x) = \frac{h\omega_e}{K - m\omega_e^2}$ F(t) toujours en avance de phase sur x (t) .
Résonance de charge $N = N_r = \sqrt{N_0^2 - \frac{R_T^2}{8\pi^2 L^2}}$	Résonance d'élongation $N = N_r = \sqrt{N_0^2 - \frac{h^2}{8\pi^2 m^2}}$