

Résumé du cours

Définition 1: Soit A et B deux ensembles finis. Leur intersection $A \cap B$, qui se lit « A inter B », est l'ensemble des éléments qui appartiennent à la fois à A et à B. les ensembles A et B sont dits disjoints lorsqu'ils n'ont aucun élément en commun. A et B sont disjoints équivaut à $A \cap B = \emptyset$

Définition 2: Soit A et B deux ensembles finis. Leur réunion $A \cup B$, qui se lit « A union B », est l'ensemble dont les éléments appartiennent à A ou à B.

Si A et B sont disjoints, alors $\text{card}(A \cup B) = \text{card } A + \text{card } B$.

Si A et B ne sont pas disjoints, alors $\text{card}(A \cup B) = \text{card } A + \text{card } B - \text{card}(A \cap B)$

Définition 3: Soit E un ensemble fini, de cardinal n et A une partie de E. le complémentaire $\bar{A}$ de A dans E est l'ensemble des éléments de E qui n'appartiennent pas à A. on a alors : $A \cup \bar{A} = E$; $A \cap \bar{A} = \emptyset$; $\text{card } \bar{A} = n - \text{card } A$.

Définition 4: Le produit cartésien $E \times F$, se lit « E crois F », est l'ensemble des couples $(x; y)$ tels que x appartient à E et y appartient à F. On a : $\text{card}(E \times F) = \text{card } E \times \text{card } F$

Soit E un ensemble non vide et fini. Le produit cartésien $\underbrace{E \times E \times \dots \times E}_{p \text{ fois}}$ est l'ensemble des p-uplets

$(x_1; x_2; \dots; x_p)$ tels que x_i appartient à E. On le note E^p et on a $\text{card}(E^p) = (\text{card } E)^p$

Définition 5: Soit E un ensemble fini non vide de cardinal n. on appelle permutation des n éléments de E tout n-uplets d'éléments distincts de E.

Définition 6: Soit E un ensemble fini non vide de cardinal n et p un entier tel que $1 \leq p \leq n$. On appelle arrangement de p éléments de E tout p-uplets d'éléments distincts de E.

Théorème : Soit E un ensemble fini non vide de cardinal n et p un entier tel que $1 \leq p \leq n$. Le nombre d'arrangement de p éléments de E est l'entier noté : A_n^p (On lit « A, n, p ») tel que

$$A_n^p = n \times (n-1) \times \dots \times (n-p+1) = \frac{n!}{(n-p)!} \text{ On convient que } A_n^0 = 1$$

Soit f une application d'un ensemble E vers un ensemble F. on dit que f est injective lorsque pour tous $x; x'$ de E tels que $x \neq x'$; on a $f(x) \neq f(x')$

Définition 7: Soit E un ensemble fini non vide de cardinal n et p un entier tel que $0 \leq p \leq n$. On appelle combinaison de p éléments de E, toute partie à p éléments distincts de E. Le nombre de parties à p éléments

d'un ensemble à n éléments est l'entier naturel noté C_n^p (On lit « C, n, p ») ou $\binom{n}{p}$

Théorème : Soit n et p deux entiers naturels tels que $0 \leq p \leq n$. Alors $C_n^p = \frac{n!}{(n-p)!p!}$

Binôme de Newton : Soit a et b deux réels. Pour tout entier naturel non nul n, on a :

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n b^0 + C_n^1 a^{n-1} b^1 + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \dots + C_n^n a^0 b^n$$