

I. Division euclidienne - Divisibilité :

- Exercice 1 page 55

↳ **Rappels :**

✓ Soit a et b deux entiers naturels tels que $b \neq 0$

Effectuer la **division euclidienne** de a par b , c'est trouver l'unique couple (q, r) d'entiers naturels tels que :

$$a = \dots \dots \dots \text{ avec } \dots \dots \leq r < \dots \dots$$

✓ Lorsque $r = 0$, on dit que b a ou

b a ou

a b ou a b et on note $b|a$

Ainsi :

$b|a$ signifie $a = bq$, avec $q \in \mathbb{N}$

Applications :

- 1) Le quotient d'une division euclidienne est 8 et le reste vaut 5. Si l'on ajoute 43 au dividende, le quotient devient 10 et le reste 4. Déterminer le diviseur et le dividende.
- 2) Montrer que la somme de cinq entiers naturels consécutifs est divisible par 5.

- Activité 3 page 56

↳ **Propriétés :**

Soit n, x et y trois entiers naturels tels que $n|x$ et $n|y$ alors :

- (1) $n|px$ où $p \in \mathbb{N}$
- (2) $n|x + y$
- (3) $n|x - y$ ($x \geq y$)

Application : Exercice 3 page 60

A faire : Exercices 4 et 7 page 60

II. Critères de divisibilité par 2, 4, 5, 8 et 25 :1- Critères de divisibilité par 2 et 5

- Un entier naturel est **divisible par 2** si et seulement si

.....

- Le reste de la division euclidienne d'un entier par 2 est le reste de

.....

- Un entier naturel est **divisible par 5** si et seulement si

.....

- Le reste de la division euclidienne d'un entier par 5 est le reste de

.....

2- Critères de divisibilité par 4 et 25

- Un entier naturel est **divisible par 4** si et seulement si

.....

- Le reste de la division euclidienne d'un entier par 4 est le reste de

.....

- Un entier naturel est **divisible par 25** si et seulement si
- Le reste de la division euclidienne d'un entier par 25 est le reste de

3- Critères de divisibilité par 8

- Un entier naturel supérieur ou égal à 100 est **divisible par 8** si et seulement si
- Le reste de la division euclidienne d'un entier naturel supérieur ou égal à 100 par 8 est le reste de

Application : Exercices 5 et 6 page 60

III. Critères de divisibilité par 3 et 9 :

- Un entier naturel est **divisible par 3** si et seulement si
- Le reste de la division euclidienne d'un entier par 3 est le reste de
- Un entier naturel est **divisible par 9** si et seulement si
- Le reste de la division euclidienne d'un entier par 9 est le reste de

Application : Exercices 8 et 9 page 60

A faire : Exercices 5, 6, 7 et 11 page 64

IV. Critères de divisibilité par 11 :

- Activité 10 page 58 ; 2)
- Activité 12 page 59
- Activité 13 page 59

→ **Retenons :**

Soit n un entier naturel.

Soit S_1 la somme de ses chiffres de rang impairs (de droite à gauche) et S_2 la somme de ses chiffres de rang pairs.

Soit $d = S_1 - S_2$

- Si $d \geq 0$
 - n est divisible par 11 si et seulement si
 - Le reste de la division euclidienne de n par 11 est égal
- Si $d < 0$

Soit m le plus petit multiple de 11 tel que $d + m \geq 0$

 - n est divisible par 11 si et seulement si
 - Le reste de la division euclidienne de n par 11 est égal à

Application : activité 11 page 59

A faire : Exercices 12 et 13 page 64



• *Division euclidienne :*

Définition :

Soient a et b 2 entiers tels que $b \neq 0$. Effectuer la division euclidienne de a par b , c'est trouver l'unique couple (q, r) tel que $a = bq + r$ avec $0 \leq r < b$
 q : est le quotient ; r est le reste

Remarque : si $r = 0$, on dit alors que b divise a ou a est divisible par b ou a est un multiple de b . On note $b \mid a$.

Applications

1. Montrer que la somme de 5 nombres consécutifs est divisible par 5

.....

2. Montrer que si n divise a et n divise b alors n divise $a+b$ et n divise ab

.....

3. Soit n un entier pair. Montrer que n^2 est divisible par 4

.....

4. Soit un entier impair. Montrer que n^2-1 est divisible par 8 (indication : montrer d'abord que le produit de 2 entiers consécutifs est un nombre pair)*

.....

5. a) Quels sont les restes possibles de la division euclidienne d'un entier naturel n par 3

.....

b) montrer que pour tout entier naturel n on a : $n^3 - n$ est divisible par 3

.....

6. a) Montrer que $\frac{4n+10}{n+1} = 4 + \frac{6}{n+1}$

b) En déduire les entiers naturels n tel que $\frac{4n+10}{n+1}$ soit un entier naturel

.....

• *Divisibilité par 3, 4, 5, 8, 9 et 25 :*

1. Un entier est divisible par 3 si et seulement si la somme de ses chiffres est divisible par 3 .

Le reste de la division euclidienne d'un entier par 3 est égal au reste de la division euclidienne de la somme de ses chiffres par 3.

2. Un entier est divisible par 4 si et seulement si le nombre formé par ses deux derniers chiffres est divisible par 4 .

Le reste de la division euclidienne d'un entier par 4 est égal au reste de la division euclidienne par 4 du nombre formé par ses deux derniers chiffres.

3. Un entier est divisible par 5 si et seulement si son chiffre des unités est divisible par 5 (c'est -à- dire il est égal à 0 ou 5) .

Le reste de la division euclidienne d'un entier par 5 est égal au reste de la division euclidienne de son chiffre des unités par 5.

4. Un entier supérieur à 100 est divisible par 8 si et seulement si le nombre formé par ses trois derniers chiffres est divisible par 8 .

Le reste de la division euclidienne d'un entier par 8 est égal au reste de la division euclidienne par 8 du nombre formé par ses trois derniers chiffres.

5. Un entier est divisible par 9 si et seulement si la somme de ses chiffres est divisible par 9 .

Le reste de la division euclidienne d'un entier par 9 est égal au reste de la division euclidienne de la somme de ses chiffres par 9.

6. Un entier est divisible par 25 si et seulement si le nombre formé par ses deux derniers chiffres est divisible par 25 .

Le reste de la division euclidienne d'un entier par 25 est égal au reste de la division euclidienne par 25 du nombre formé par ses deux derniers chiffres.

Exercice :

Un nombre n est dit un palindrome d'un nombre m si l'écriture décimale de n correspond à l'envers de l'écriture décimale de m (3251 est un palindrome de 1523)

- a) Choisir 2 nombres palindromes et vérifier que leur différence est divisible par 9

.....

- b) Démontrer que la différence de 2 nombres palindromes est divisible par 9(vous pouvez prendre 2 nombres à 3 chiffres)

.....

• Divisibilité par 11 :

Soit a un entier naturel .On désigne par S_1 la somme des chiffres de a de rang impairs (de droite à gauche) et par S_2 la somme des chiffres de a de rang pairs et on considère l'entier relatif $m = S_1 - S_2$.

- Si $(m \geq 0)$ alors on a :

* a est divisible par 11 si et seulement si m est divisible par 11.

* Le reste de la division euclidienne de a par 11 est le même que le reste de la division euclidienne de m par 11

- Si $(m < 0)$ alors on a :

* a est divisible par 11 si et seulement si $(m + 11p)$ est divisible par 11.

* Le reste de la division euclidienne de a par 11 est le même que le reste de la division euclidienne de $(m + 11p)$ par 11 .

(p désigne le plus petit entier naturel tel que $m + 11p$ soit positif ou nul)

(Par exemple pour $a = 609181$; $m = S_1 - S_2 = (1+1+0) - (8+9+6) = -21 < 0$; $p = 2$; $m + 11p = 1$) .

Exercice n°1

Soit $n = 3a6b4$ où a et b désignent respectivement le chiffre des milliers et le chiffre des dizaines

1. Montrer que n est divisible par 11 si et seulement si $a+b = 13$ ou $a+b = 2$
2. En déduire alors les valeurs de a et b pour les quelles n est divisible par 11

Exercice n°2

n	Le reste de divisibilité de n par 4	Le reste de divisibilité de n par 8	Le reste de divisibilité de n par 9	Le reste de divisibilité de n par 25
35479				
98752315				
9870540				
357689				
365555437				

Exercice n°3

- 1) Sans faire la division, dire quel est le reste de la division euclidienne de 123456 par 11 ?
- 2) Déterminer le chiffre a pour que le nombre $3a27$ soit divisible par 9 .
- 3) Déterminer le chiffre b pour que le reste de la division euclidienne de $72b56$ par 11 soit égal à 2 .
- 4) Déterminer le chiffre c pour que le nombre $17091c$ soit divisible par 11 .