

LYCÉE OUED-ELLIL

FICHE MÉTHODE – MATHÉMATIQUES

CLASSE : 2^{ÈME} ANNÉE SECONDAIRE : SCIENCES / INFO

THÈMES: - CONSTRUCTION DU BARYCENTRE DE DEUX POINTS

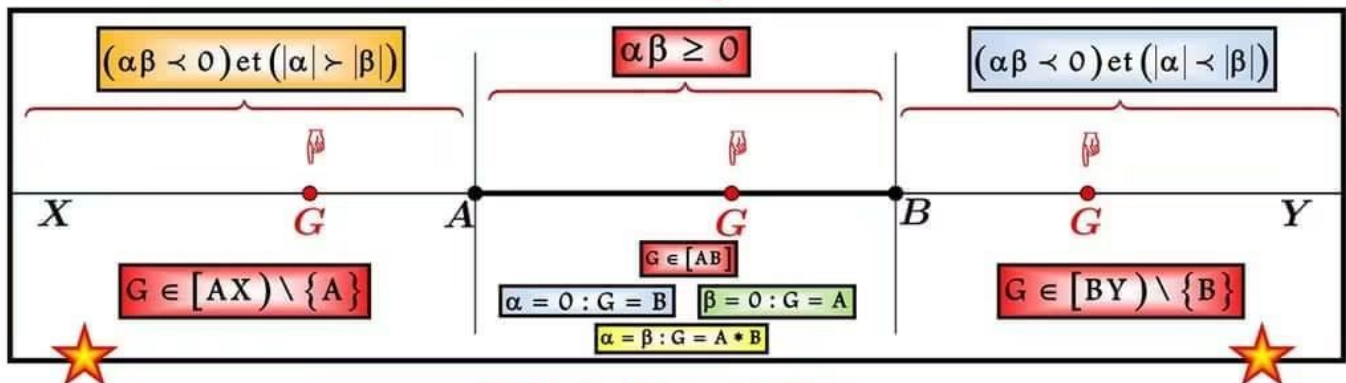
PROF : BELLASSOUED MOHAMED / ANNÉE SCOLAIRE 2018-2019



- A et B deux points distincts du plan . α et β deux réels tels que $\alpha + \beta \neq 0$
Il existe un unique point G appelé **barycentre des points pondérés** (A; α) et (B; β) qui vérifie la relation vectorielle $\alpha \overrightarrow{GA} + \beta \overrightarrow{GB} = \vec{0}$

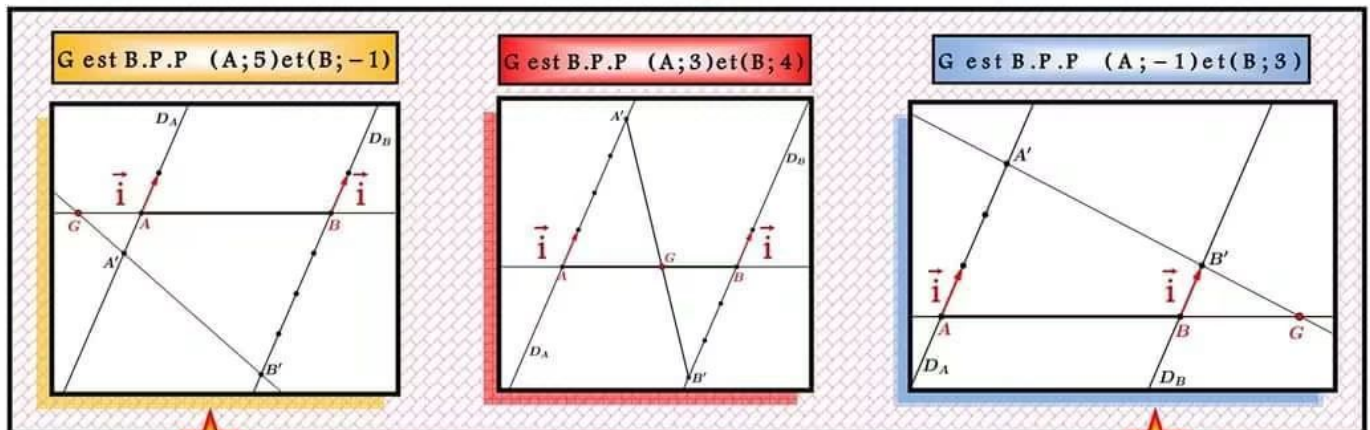
- **conséquences** : $\overrightarrow{AG} = \frac{\beta}{\alpha + \beta} \overrightarrow{AB}$ $\overrightarrow{BG} = \frac{\alpha}{\alpha + \beta} \overrightarrow{BA}$ $G \in (AB)$

Position du point G



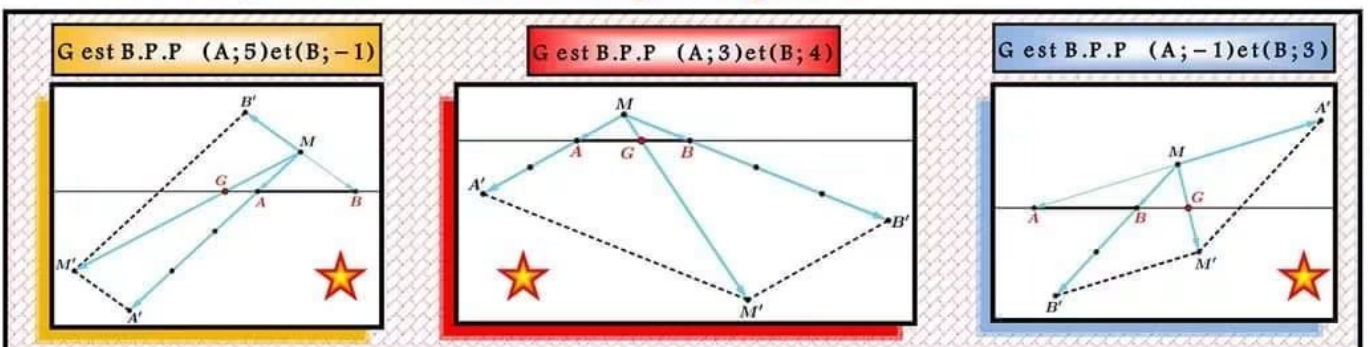
construction du point G:

Méthode des parallèles



construction du point G:

Méthode du parallélogramme



LYCÉE OUED-ELLIL



DEUX EXERCICES CORRIGÉS - MATHÉMATIQUES

CLASSE : 2^{IE}ME ANNÉE SECONDAIRE / SECTION:SCIENCES

THÈME : BARYCENTRE

PROF : BELLASSOUED MOHAMED / ANNÉE SCOLAIRE 2021-2022



Extrait d'un devoir

EXERCICE 1:

ABC est un triangle isocèle en A, $AB = AC = 5$; $BC = 8$; $I = B * C$ et G est le centre de gravité de ABC.

- 1- Faire une figure puis calculer AI et AG
- 2- Montrer que G est le barycentre des points pondérés (A, 1) (I, 2)
- 3- On appelle H le barycentre de (A, 1) et (I, 2) et (B, 3).
Montrer que H est le milieu de [GB]. Construire H.
- 4- Soit $\mathcal{E}$ l'ensemble des points M du plan tels que $\|\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MI} + 3\overrightarrow{MB}\| = \|\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MI} - 3\overrightarrow{MB}\|$
 - a- Montrer que B appartient à $\mathcal{E}$
 - b- déterminer l'ensemble $\mathcal{E}$ et construire $\mathcal{E}$.
- 5- a- construire le point D tel que ABDC est un parallélogramme
b- montrer que $\overrightarrow{DG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{DB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{DC}$
c- en déduire que G est barycentre des points D, B et C affectés des coefficients que l'on déterminera
d- calculer DG

EXERCICE 2:

Extrait d'un devoir

BAREME

Soit ABC un triangle isocèle en A . $AB = AC = 3$ et $BC = 5$

- 1- Construire le point G barycentre des points pondérés (A,5) et (C,-2) 0,5
- 2- Soit F le point du plan tel que $5\overrightarrow{FA} + 2\overrightarrow{FB} - 2\overrightarrow{FC} = \vec{0}$
 - a- Montrer que F est barycentre des points pondérés (G,3) et (B,2) 0,75
 - b- Construire le point F 0,5
- 3- a- Déterminer et construire l'ensemble des points M du plan vérifiant $\|5\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MC}\| = 6$ 1
b- Vérifier que A est un point de cet ensemble 0,5
- 4- Montrer que la droite (AF) est parallèle a la droite (BC) 0,75
- 5- La droite passante par F et parallèle a (AC) coupe (BC) en I .
Montrer que I est le barycentre des points pondérés (B,2) et (C,3) 1
- 6- a- Vérifier que le quadrilatère AFIC est un parallélogramme . On note K son centre. 0,25
b- Montrer que $\overrightarrow{CK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CA} + \frac{1}{5}\overrightarrow{CB}$ 1
c- En déduire que K est barycentre des points A , B et C affectés des coefficients α , β et γ que l'on déterminera 0,75

Correction de l'Exercice 1 :

1- ABC est un triangle isocèle en A, I est le milieu de [BC], G est le centre de gravité de ABC.

le point G est le point d'intersection des deux médianes du triangle ABC (voir figure)

2- G est le centre de gravité de ABC donc

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0} \text{ d'après la relation de chasle}$$

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GI} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{GI} + \overrightarrow{IC} = \vec{0} \text{ signifie } \overrightarrow{GA} + \underbrace{\overrightarrow{GI} + \overrightarrow{GI}}_{2\overrightarrow{GI}} + \underbrace{\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC}}_{\vec{0}} = \vec{0} \text{ donc } \boxed{\overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{GI} = \vec{0}} \text{ et puisque } 1+2=3 \neq 0 \text{ alors G est le}$$

barycentre des points pondérés (A, 1) (I, 2)

$$3- \text{H le barycentre de (A, 1) et (I, 2) et (B, 3) signifie } \overrightarrow{HA} + 2\overrightarrow{HI} + 3\overrightarrow{HB} = \vec{0} \text{ signifie } \underbrace{\overrightarrow{HA} + 2\overrightarrow{HI}}_{3\overrightarrow{HG}} + 3\overrightarrow{HB} = \vec{0} \text{ signifie } 3\overrightarrow{HG} + 3\overrightarrow{HB} = \vec{0}$$

et par suite $\boxed{\overrightarrow{HG} + \overrightarrow{HB} = \vec{0}}$ ainsi H est le milieu de [GB]

$$4- \text{C l'ensemble des points M du plan tels que } \|\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MI} + 3\overrightarrow{MB}\| = \|\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MI} - 3\overrightarrow{MB}\| \quad \textcircled{D}$$

$$\text{a - si } M=B; \|\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MI} + 3\overrightarrow{MB}\| = \|\overrightarrow{BA} + 2\overrightarrow{BI} + 3\underbrace{\overrightarrow{BB}}_{\vec{0}}\| = \|\overrightarrow{BA} + 2\overrightarrow{BI}\|$$

$$\text{et } \|\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MI} - 3\overrightarrow{MB}\| = \|\overrightarrow{BA} + 2\overrightarrow{BI} - 3\underbrace{\overrightarrow{BB}}_{\vec{0}}\| = \|\overrightarrow{BA} + 2\overrightarrow{BI}\|$$

Et par suite l'égalité $\textcircled{D}$ est vérifiée et donc $\boxed{B \in \mathcal{C}}$

$$\text{b - } M \in \mathcal{C} \text{ signifie } \|\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MI} + 3\overrightarrow{MB}\| = \|\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MI} - 3\overrightarrow{MB}\|$$

$$\text{. H le barycentre de (A, 1) et (I, 2) et (B, 3) donc } \|\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MI} + 3\overrightarrow{MB}\| = \|6\overrightarrow{MH}\| = 6MH$$

$$\text{. G est le barycentre de (A, 1) (I, 2) donc } \|\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MI} - 3\overrightarrow{MB}\| = \|3\overrightarrow{MG} - 3\overrightarrow{MB}\| = 3\|\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{BM}\| = 3\|\underbrace{\overrightarrow{BM} + \overrightarrow{MG}}_{\overrightarrow{BG}}\|$$

$$\text{Et par suite } \|\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MI} - 3\overrightarrow{MB}\| = 3BG.$$

Ainsi $M \in \mathcal{C}$ signifie $6MH = 3BG$ signifie $\boxed{MH = \frac{BG}{2}}$ Et par conséquent l'ensemble $\mathcal{C}$ cherché est le cercle de centre H et

$$\text{de rayon } R = \frac{BG}{2}$$

Construction : $\mathcal{C}$ est le cercle de centre H et passant par B (voir figure)

5- a- voir figure

$$5- \text{b } \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC}$$

$$\text{signifie } \overrightarrow{DG} + \overrightarrow{GA} = \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC}$$

$$\text{signifie } \overrightarrow{DG} = \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{AG}$$

$$\text{signifie } \overrightarrow{DG} = \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AI}$$

$$\text{signifie } \overrightarrow{DG} = \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC} + \frac{2}{3} \times \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$$

$$\text{signifie } \overrightarrow{DG} = \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC} - \frac{1}{3}\overrightarrow{DA}$$

$$\text{signifie } \overrightarrow{DG} = \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC} - \frac{1}{3}(\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC})$$

$$\text{signifie } \overrightarrow{DG} = \left(\overrightarrow{DB} - \frac{1}{3}\overrightarrow{DB}\right) + \left(\overrightarrow{DC} - \frac{1}{3}\overrightarrow{DC}\right)$$

$$\qquad \qquad \qquad \frac{2}{3}\overrightarrow{DB} \qquad \qquad \qquad \frac{2}{3}\overrightarrow{DC}$$

$$\text{Et par suite } \boxed{\overrightarrow{DG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{DB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{DC}}$$

Correction de l'Exercice 1 :

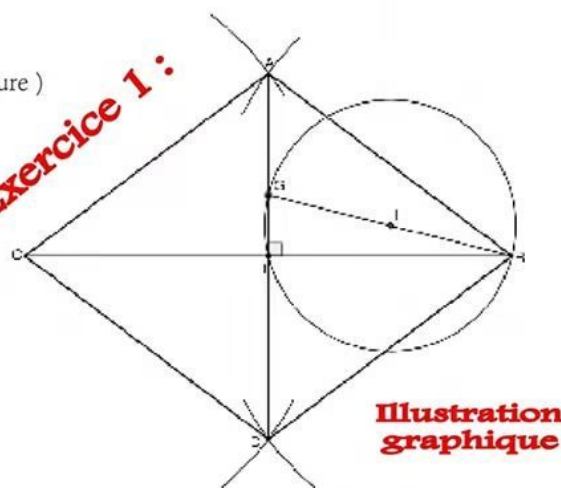


Illustration graphique

5- c G est barycentre du système $\{(D, \alpha); (B, \beta); (C, \gamma)\}$, avec $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$

$$\text{signifie } \overrightarrow{DG} = \frac{\beta}{\alpha + \beta + \gamma} \overrightarrow{DB} + \frac{\gamma}{\alpha + \beta + \gamma} \overrightarrow{DC} = \frac{2}{3} \overrightarrow{DB} + \frac{2}{3} \overrightarrow{DC}$$

$$\text{signifie } \begin{cases} \beta = 2 \\ \gamma = 2 \\ \alpha + \beta + \gamma = 3 \end{cases} \quad \text{signifie } \begin{cases} \beta = 2 \\ \gamma = 2 \\ \alpha + 4 = 3 \end{cases} \quad \text{signifie } \begin{cases} \beta = 2 \\ \gamma = 2 \\ \alpha = -1 \end{cases}$$

Donc G est barycentre du système $\{(D, -1); (B, 2); (C, 2)\}$

$$5- \text{d } DG = DI + IG = 3 + 1 = 4 \text{ donc } \boxed{DG = 4}$$

Correction de l'Exercice 2 :

1- le point G barycentre des points pondérés (A,5) et (C,-2) : $\overrightarrow{AG} = \frac{-2}{5+(-2)}\overrightarrow{AC} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$ (voir figure)

2- a- F le point du plan tel que $5\overrightarrow{FA} + 2\overrightarrow{FB} - 2\overrightarrow{FC} = \vec{0}$

$5\overrightarrow{FA} + 2\overrightarrow{FB} - 2\overrightarrow{FC} = \vec{0}$ signifie $5\overrightarrow{FA} - 2\overrightarrow{FC} + 2\overrightarrow{FB} = \vec{0}$. G barycentre des points (A,5) et (C,-2) donc $5\overrightarrow{FA} - 2\overrightarrow{FC} = (5-2)\overrightarrow{FG} = 3\overrightarrow{FG}$ et par suite $\underbrace{5\overrightarrow{FA} - 2\overrightarrow{FC}}_{3\overrightarrow{FG}} + 2\overrightarrow{FB} = \vec{0}$ signifie $3\overrightarrow{FG} + 2\overrightarrow{FB} = \vec{0}$

• $3+2=5 \neq 0$ donc **F est barycentre des points pondérés (G,3) et (B,2)**

b- $\overrightarrow{GF} = \frac{2}{3+2}\overrightarrow{GB} = \frac{2}{5}\overrightarrow{GB}$, d'où la construction du point F (voir figure)

3- a- Ensemble des points M du plan vérifiant $\|5\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MC}\| = 6$

• G est barycentre des points (A,5) et (C,-2) donc $5\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MC} = (5-2)\overrightarrow{MG} = 3\overrightarrow{MG}$

• $\|5\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MC}\| = 6$ signifie $\|3\overrightarrow{MG}\| = 6$ donc $\|\overrightarrow{MG}\| = 2$, et par suite $GM = 2$, ainsi l'ensemble cherché est **le cercle $\mathcal{C}$ de centre G et de rayon $R = 2$** . Pour la construction voir figure

b- $A \in \mathcal{C}$: $\overrightarrow{AG} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$ donc $\|\overrightarrow{AG}\| = \left\|-\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}\right\|$ et par suite $AG = \frac{2}{3}AC = \frac{2}{3} \times 3 = 2$, ainsi $A \in \mathcal{C}$

4- Première méthode : $5\overrightarrow{FA} + 2\overrightarrow{FB} - 2\overrightarrow{FC} = \vec{0}$

d'après Chasles $5\overrightarrow{FA} + 2(\overrightarrow{FA} + \overrightarrow{AB}) - 2(\overrightarrow{FA} + \overrightarrow{AC}) = 5\overrightarrow{FA} + 2\overrightarrow{FA} - 2\overrightarrow{FA} + 2\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC} = \vec{0}$

sig $5\overrightarrow{FA} + 2\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{CA} = \vec{0}$ sig $5\overrightarrow{FA} + 2(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB}) = \vec{0}$ $5\overrightarrow{FA} + 2\overrightarrow{CB} = \vec{0}$ donc $\overrightarrow{FA} = -\frac{2}{5}\overrightarrow{CB}$

les deux vecteurs $\overrightarrow{AF}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires et par suite $(AF) \parallel (BC)$

deuxième méthode : • $\overrightarrow{AG} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AC} = -\frac{2}{3}(\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GC}) = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AG} - \frac{2}{3}\overrightarrow{GC}$ sig $\overrightarrow{AG} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AG} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{GC}$ sig

sig $\frac{5}{3}\overrightarrow{AG} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{GC}$ et par suite $\overrightarrow{AG} = -\frac{2}{5}\overrightarrow{GC}$ donc $\frac{GA}{GC} = \frac{2}{5}$; • $\overrightarrow{GF} = \frac{2}{5}\overrightarrow{GB}$ donc $\frac{GF}{GB} = \frac{2}{5}$, ainsi $\boxed{\frac{GA}{GC} = \frac{GF}{GB} = \frac{2}{5}}$

• Les points G, A et C d'une part, et les points G, F et B d'autre part sont alignés dans le même ordre, et $\frac{GA}{GC} = \frac{GF}{GB}$, donc d'après **la réciproque du théorème de Thalès** on a $(AF) \parallel (BC)$

5- On appliquant le **théorème de Thalès** tel que $(IF) \parallel (GC)$; $F \in (BG)$ et $I \in (BC)$:

$\frac{CI}{CB} = \frac{GF}{GB} = \frac{2}{5}$ donc $\frac{CI}{CB} = \frac{2}{5}$ et par suite $CI = \frac{2}{5}CB$

• Les vecteurs $\overrightarrow{CI}$ et $\overrightarrow{CB}$ sont colinéaires de même sens

donc $\overrightarrow{CI} = \frac{2}{5}\overrightarrow{CB} = \frac{2}{2+3}\overrightarrow{CB}$, ainsi **I est le barycentre des points pondérés (B,2) et (C,3)**.

6- a- $(AF) \parallel (IC)$ et $(FI) \parallel (AC)$ donc AFIC est un **parallélogramme**

b- K est le centre du parallélogramme AFIC, donc $\overrightarrow{CK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CF}$

signifie $\overrightarrow{CK} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CI}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{CA} + \frac{2}{5}\overrightarrow{CB}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{CA} + \frac{1}{5}\overrightarrow{CB}$ et par suite

c- $\overrightarrow{CK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CA} + \frac{1}{5}\overrightarrow{CB} = \frac{5}{10}\overrightarrow{CA} + \frac{2}{10}\overrightarrow{CB} = \frac{\alpha}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{CA} + \frac{\beta}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{CB}$ avec $\begin{cases} \alpha = 5 \\ \beta = 2 \\ \alpha + \beta + \gamma = 10 \Leftrightarrow \gamma = 3 \end{cases}$

ainsi le point **K** est barycentre des points pondérés (A,5), (B,2) et (C,3)

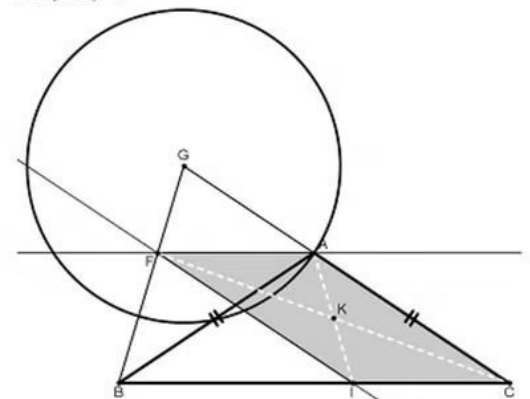


Illustration graphique