

2^{ème} Année de l'Enseignement
Secondaire

- Sciences
- Technologie de l'informatique

Chapitre 1: Calcul dans $\mathbb{R}$

1 Les ensembles de Nombres

1.1 Nombres entiers naturels

Un nombre entier naturel est un nombre entier qui est positif. L'ensemble des nombres entiers naturels est noté $\mathbb{N}$. $\mathbb{N} = \{0; 1; 2; 3; 4; \dots\}$.

Exemples :

$$5 \in \mathbb{N} ; \frac{15}{3} \in \mathbb{N} ; 13^5 \in \mathbb{N} ; \sqrt{16} \in \mathbb{N} ; \sqrt{12} \notin \mathbb{N} ; \frac{25}{2} \notin \mathbb{N} ; -5 \notin \mathbb{N}$$

$$\left\{1; 5; 14; \sqrt{16}; \frac{24}{8}; 15^3\right\} \subset \mathbb{N} ; \left\{3; 8; \frac{14}{3}\right\} \not\subset \mathbb{N}$$

1.2 Nombres entiers relatifs

Un nombre entier relatif est un nombre entier qui est positif ou négatif. L'ensemble des nombres entiers relatifs est noté $\mathbb{Z}$. $\mathbb{Z} = \{\dots; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; \dots\}$.

Exemples :

$$5 \in \mathbb{Z} ; \frac{25}{5} \in \mathbb{Z} ; -135^7 \in \mathbb{Z} ; -\sqrt{36} \in \mathbb{Z} ; \sqrt{15} \notin \mathbb{Z} ; \frac{17}{3} \notin \mathbb{Z} ; -5,2 \notin \mathbb{Z}$$

$$\left\{2; -6; 18; -\sqrt{49}; \frac{45}{9}; -5^3\right\} \subset \mathbb{Z} ; \left\{5; -13; \frac{26}{5}\right\} \not\subset \mathbb{Z}$$

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$$

1.3 Nombres décimaux

Un nombre décimal peut s'écrire avec un nombre fini de chiffres après la virgule. L'ensemble des nombres décimaux est noté $\mathbb{D}$. Un nombre décimal est le quotient d'un entier relatif par une puissance de 10, $\mathbb{D} = \left\{\frac{a}{10^n}; a \in \mathbb{Z} \text{ et } n \in \mathbb{N}\right\}$, par exemple $\frac{32}{100}$, mais aussi $\frac{3}{5} = \frac{6}{10}$.

Exemples :

$$7,2 \in \mathbb{D} ; \frac{32}{100} \in \mathbb{D} ; -\frac{3}{5} \in \mathbb{D} ; \frac{\sqrt{\pi^2}}{\pi} \in \mathbb{D} ; \frac{5}{3} \notin \mathbb{D} ; \sqrt{13} \notin \mathbb{D}$$

$$\left\{3,25; -6,5; 17; -\sqrt{4}; \frac{42}{7}; \frac{15}{10^{17}}\right\} \subset \mathbb{D} ; \left\{-1,5; \frac{8}{2}; \frac{1}{3}\right\} \not\subset \mathbb{D}$$

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D}$$

1.4 Nombres rationnels

Un nombre rationnel peut s'écrire sous la forme d'un quotient $\frac{a}{b}$ avec a un entier et b un entier non nul. L'ensemble des nombres rationnels est noté $\mathbb{Q}$. $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} ; a \in \mathbb{Z} \text{ et } b \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \right\}$

Exemples :

$$\frac{1}{3} \in \mathbb{Q} ; 4 \in \mathbb{Q} - 4,8 \in \mathbb{Q} \sqrt{2} \notin \mathbb{Q} ; \pi \notin \mathbb{Q}$$

$$\left\{ 3; -\frac{3}{15}; \frac{17}{3}; -\sqrt{100}; \frac{105}{6} \right\} \subset \mathbb{Q} ; \left\{ -1,5; \frac{8}{2}; \frac{1}{3}; \sqrt{2} \right\} \not\subset \mathbb{Q}$$

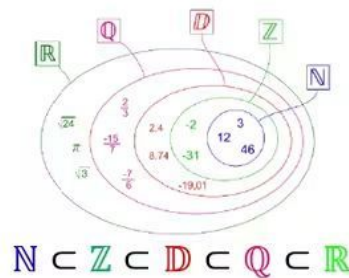
$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q}$$

1.5 Nombres réels

l'ensemble des réels, noté $\mathbb{R}$, qui est l'ensemble de tous les nombres usuels. Les réels correspondent aux abscisses possibles d'un point sur une droite graduée.

Les nombres réels qui ne sont pas rationnels sont appelés **irrationnels**. Parmi eux, on trouve π ou $\sqrt{2}$.

Ces différents ensembles de nombres sont inclus les uns dans les autres suivant le schéma suivant :



$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

1.6 Ensemble vide

Un ensemble qui ne contient pas de nombre s'appelle l'ensemble vide et se note $\emptyset$.

1.7 Symbole d'exclusion

Le signe $*$ exclu le nombre 0 d'un ensemble. Par exemple, $\mathbb{R}^*$ est l'ensemble des nombres réels privé de 0.

2 Proportionnalité et Pourcentage

2.1 Proportionnalité

On dit qu'un tableau est un tableau de proportionnalité si le rapport de chaque nombre de la 2^{ème} ligne par celui de la première est toujours le même. Ce rapport s'appelle le coefficient de proportionnalité.

Exemples :

2	5	8	10
6	15	24	30

Le Coefficient de proportionnalité est $3 = \frac{6}{2} = \frac{15}{5} = \frac{24}{8} = \frac{30}{10}$

On dit que 2 variables d'un tableau sont inversement proportionnelles si leurs produit est un réel fixe non nul

Exemples :

2	5	8	10
1	0,4	0,25	0,2

Le Coefficient de proportionnalité est $2 = 2 \times 1 = 5 \times 0,4 = 8 \times 0,25 = 10 \times 0,2$

Définition :

Soit a, b, c et d des réels tels que $b \neq 0$ et $d \neq 0$.

- ✓ a et c sont respectivement proportionnels à b et d si et seulement si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$
- ✓ L'égalité $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ s'appelle une proportion. (c'est une égalité de deux rapports).

Théorème

Soit a, b, c et d des réels tels que $b \neq 0$ et $d \neq 0$.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \text{ équivaut à } ad = bc \quad (\text{Produit des moyens} = \text{produit des extrêmes})$$

2.2 Pourcentage

- La proportion en pourcentage d'une quantité A par rapport à une quantité totale B est égale à $\frac{A}{B} \times 100$ (en %).
- Prendre $x\%$ d'une grandeur revient à la multiplier par $\frac{x}{100}$.
- Augmenter une grandeur de $x\%$ revient à la multiplier par $\left(1 + \frac{x}{100}\right)$.
- Diminuer une grandeur de $x\%$ revient à la multiplier par $\left(1 - \frac{x}{100}\right)$.

3 Les identités remarquables

Soit a et b deux réels, on a les identités remarquables suivantes :

$$a(b + c) = ab + ac \quad (a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$$

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \quad (a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \quad (a - b)(a + b) = a^2 - b^2$$

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \quad (a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

$$(a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3 \quad (a + b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$$

4 Les Radicaux

Soit a un réel positif ou nul, on appelle racine carrée de a le seul nombre **positif** b dont le carré est égal à $b^2 = a$. La racine carrée de a est notée $b = \sqrt{a}$

Si a est positif alors on a $\sqrt{a^2} = (\sqrt{a})^2 = a$ Si a est négatif alors on a $\sqrt{a^2} = -a$ en général on a $\sqrt{a^2} = |a|$.

Soient x et y deux nombres réels strictement positifs : $\sqrt{x}\sqrt{y} = \sqrt{xy}$; $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}} = \sqrt{\frac{x}{y}}$; $\sqrt{x} + \sqrt{y} \neq \sqrt{x+y}$

5 Formule de Héron

La formule suivante (attribuée à Héron d'Alexandrie : 1er Siècle), permet de calculer l'aire $\mathcal{A}$ d'un triangle lorsque l'on connaît les longueurs a, b, c de ses côtés :

$\mathcal{A} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ où p désigne le demi-périmètre du triangle.

6 Comparaison de réels – Encadrement

6.1 Ordre et comparaison

Pour tout réel a, b, c et d on a :

- ✓ $a < b$ alors $a + c < b + c$ et $a - c < b - c$
- ✓ $a < b$ alors si $c > 0$ on a $ac < bc$ et si $c < 0$ on a $ac > bc$
- ✓ $a < b$ et $c < d$ alors $a + c < b + d$
- ✓ Si a, b, c et d sont des réels positifs et tel qu'on a $a < b$ et $c < d$ alors $ac < bd$
- ✓ $a < b \Leftrightarrow a - b < 0$ et $a > b \Leftrightarrow a - b > 0$
- ✓ $a < b \Leftrightarrow -a > -b$
- ✓ $0 < a < b \Leftrightarrow \frac{1}{a} > \frac{1}{b} > 0$

Soient x et y deux nombres réels positives $x \leq y \Leftrightarrow x^2 \leq y^2 \Leftrightarrow \sqrt{x} \leq \sqrt{y}$

6.2 Comparaison de a ; a^2 ; $\sqrt{a}$

Soit a un réel

- Si $a \geq 1$; alors on a $\sqrt{a} \leq a \leq a^2$
- Si $0 \leq a \leq 1$; alors on a $a^2 \leq a \leq \sqrt{a}$
- Si $a \leq 0$; alors on a $a \leq a^2$

6.3 Comparaison de a ; $\frac{1}{a}$

Soit a un réel non nul

- Si $a \geq 1$; alors on a $a \geq \frac{1}{a}$
- Si $0 \leq a \leq 1$; alors on a $a \leq \frac{1}{a}$
- Si $-1 \leq a \leq 0$; alors on a $a \geq \frac{1}{a}$
- Si $-1 \geq a$; alors on a $a \leq \frac{1}{a}$

6.4 Intervalle de $\mathbb{R}$

Définition :

on appelle intervalle réel un ensemble de nombres délimité par deux nombres réels constituant une borne inférieure et une borne supérieure, ou inférieurs à une valeur, ou supérieurs à une valeur.

Remarque : Un intervalle peut se représenter à l'aide d'un segment ou d'une demi-droite sur un axe

Cette définition regroupe les intervalles des types suivants (avec a et b réels et $a < b$) :

Intervalle	Inégalités	Représentation d'un exemple
$[a; b]$	$a \leq x \leq b$	$[-2; 3]$:
$]a; b]$	$a < x \leq b$	$] -2; 3]$:
$[a; b[$	$a \leq x < b$	$[-2; 3[$:
$]a; b[$	$a < x < b$	$] -2; 3[$:
$[a; +\infty[$	$a \leq x$	$[-2; +\infty[$:
$]a; +\infty[$	$a < x$	$] -2; +\infty[$:
$] -\infty; b]$	$x \leq b$	$] -\infty; 3]$:
$] -\infty; b[$	$x < b$	$] -\infty; 3[$:

Remarque :

- $[a; b]$ contient les nombres a et b : intervalle fermé.
- $]a; b]$ ne contient pas a , contient b : intervalle semi-ouvert du côté de a .
- $[a; b[$ contient a , ne contient pas b : intervalle semi-ouvert du côté de b .
- $]a; b[$ ne contient ni a ni b : intervalle ouvert.
- Par définition, l'infini ne peut pas être atteint. L'intervalle est donc toujours ouvert du côté de l'infini

7 Valeur absolue

Pour tout nombre réel x , la valeur absolue de x (notée $|x|$) est définie par : $|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$

Pour tout nombre réel x et y on a :

$$|xy| = |x||y| ; \left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|}, \text{ avec } y \neq 0 ; |x + y| \leq |x| + |y| ; |x - y| \geq |x| - |y|$$

$$|x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a ; |x| \geq a \Leftrightarrow x \geq a \text{ ou } x \leq -a \text{ avec } a \in \mathbb{R}_+^*$$