

**Définition :**

Soient A, B, C et D quatre points du plan.

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ Signifie [AD] et [BC] ont le même milieu.

Egalité vectorielle :

Soient A, B, C et D quatre points du plan.

☞ $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ signifie $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$

☞ Si A, B et C ne sont pas alignés alors

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ Signifie ABDC est un parallélogramme

☞ Si A, B et C sont alignés alors

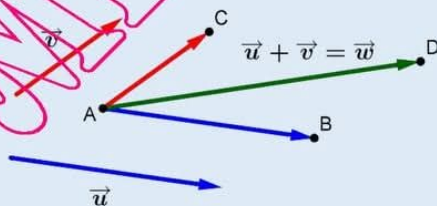
$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ alors $AB = CD$ et A, B, C et D sont alignés.

☞ $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}$ équivaut à B est le milieu du segment [AC].

Addition des vecteurs :

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs et A, B et C les points tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$.

On appelle vecteur somme de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ le vecteur $\vec{w} = \overrightarrow{AD}$ tel que [BC] et [AD] ont le même milieu.

**Propriétés :**

Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs du plan

☞ $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$

☞ $\vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w}$

☞ $\vec{u} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{u} = \vec{u}$

Opposé d'un vecteur :

Soit $\vec{u}$ un vecteur du plan, l'unique vecteur $\vec{v}$ tel que $\vec{u} + \vec{v} = \vec{0}$, s'appelle l'opposé de $\vec{u}$.

Il est noté $-\vec{u}$. Ainsi on a $\vec{u} + (-\vec{u}) = (-\vec{u}) + \vec{u} = \vec{0}$

Remarque :

☞ $\vec{u} + (-\vec{v}) = \vec{u} - \vec{v}$

☞ $-\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}$

Multiplication d'un vecteur par un réel :

Soient A un point du plan, $\vec{u}$ un vecteur non nul et B le point tel que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$.

Soit α un réel et M le point de (AB) d'abscisse α dans le repère (A, B).

On appelle vecteur produit de $\vec{u}$ par α , le vecteur $\vec{v}$ tel que $\vec{v} = \overrightarrow{AM}$

Propriétés :

Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ du plan et tous réels α et β on a :

☞ $0 \cdot \vec{u} = \vec{0}$; $1 \cdot \vec{u} = \vec{u}$; $(-1) \cdot \vec{u} = -\vec{u}$

☞ $\alpha(\vec{u} + \vec{v}) = \alpha\vec{u} + \alpha\vec{v}$

$$\bullet (\alpha + \beta)\vec{u} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{u}$$

$$\bullet \alpha(\beta\vec{u}) = (\alpha\beta)\vec{u}$$

$$\bullet \alpha\vec{u} = \vec{0} \text{ équivaut à } (\alpha = 0 \text{ ou } \vec{u} = \vec{0})$$

Vecteurs colinéaires :

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont dits colinéaires si et seulement si il existe un réel α tel que $\vec{v} = \alpha\vec{u}$

Propriétés :

3 points A, B, C sont alignés si et seulement si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

Si deux droites (AB) et (CD) sont parallèles, alors $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.

si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires, alors les droites (AB) et (CD) sont parallèles ou confondues.

Base de l'ensemble des vecteurs :

On appelle base de l'ensemble des vecteurs du plan, tout couple $(\vec{i}; \vec{j})$ de vecteurs non colinéaires.

Composantes d'un vecteur :

Soit $(\vec{i}; \vec{j})$ une base de l'ensemble des vecteurs du plan et $\vec{u}$ un vecteur.

Le couple $(x; y)$ de réels tels que $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$ est appelé couple de composantes du vecteur $\vec{u}$ dans la base $(\vec{i}; \vec{j})$.

Si x et y sont les composantes d'un vecteur $\vec{u}$ dans la base $B = (\vec{i}; \vec{j})$, on note $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

Propriétés :

Soient $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ dans une base $(\vec{i}; \vec{j})$ et soit

$$\alpha \text{ un réel, Alors : } \vec{u} + \vec{v} \begin{pmatrix} x+x' \\ y+y' \end{pmatrix} ; \alpha\vec{u} \begin{pmatrix} \alpha x \\ \alpha y \end{pmatrix}$$

Condition analytique de colinéarité :

Soient $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ dans une base $(\vec{i}; \vec{j})$.

Le déterminant des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le réel

$$\text{noté } \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = xy' - x'y$$

Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires équivaut à

$$\begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = xy' - x'y = 0$$

Repère cartésien :

Soit O un point du plan et $B = (\vec{i}; \vec{j})$ une base de l'ensemble des vecteurs du plan.

$(O; \vec{i}; \vec{j})$ est appelé repère cartésien du plan

Soit M un point du plan

Le couple de coordonnées du point M dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$ est l'unique couple (x, y) de réels tel que $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$

Le réel x est l'abscisse du point M et le réel y est l'ordonnée du point M, dans le repère cartésien. On note $M(x, y)$

Propriété :

Soit $(O; \vec{i}; \vec{j})$ un repère cartésien du plan. Soient $A(x_A, y_A)$ et $B(x_B, y_B)$ deux points du plan. Les composantes du vecteur $\overrightarrow{AB}$, dans la base $(\vec{i}; \vec{j})$

$$\text{sont } \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$$

Norme d'un vecteur :

Soient A un point du plan, un vecteur et soit B le point tel que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$

On appelle norme du vecteur $\vec{u}$ le réel noté $\|\vec{u}\|$ et qui est égal à AB.

Si $\|\vec{u}\| = 1$ on dit que $\vec{u}$ est un vecteur unitaire ou normé

Propriétés :

Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et tout réel α on a :

$\|\vec{u}\| = 0$ équivaut à $\vec{u} = \vec{0}$

$\|-\vec{u}\| = \|\vec{u}\|$

$\|\alpha\vec{u}\| = |\alpha| \|\vec{u}\|$

$\|\vec{u} + \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$

Vecteurs orthogonaux :

On dit que deux vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{CD}$ sont orthogonaux si les droites (AB) et (CD) sont perpendiculaires

Par convention le vecteur nul est orthogonal à tout vecteur du plan

Notation :

Si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux, on écrit $\vec{u} \perp \vec{v}$ et on lit le vecteur $\vec{u}$ est orthogonal au vecteur $\vec{v}$

Base orthonormée – Repère orthonormé :

On dit qu'une base $B = (\vec{i}; \vec{j})$ est une base orthonormée, si $\vec{i} \perp \vec{j}$ et $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1$

On dit que le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$ est un repère orthonormé du plan si la base $B = (\vec{i}; \vec{j})$ est une base orthonormée de l'ensemble des vecteurs du plan.

Distance de 2 points – norme d'un vecteur :

Soit $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ dans une base orthonormée $(\vec{i}; \vec{j})$ alors $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$

Soient A(x_A, y_A), B(x_B, y_B) deux points dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$ alors

$$AB = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}$$

Condition analytique d'orthogonalité :

Soient $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ dans une base orthonormée

$(\vec{i}; \vec{j})$ de l'ensemble des vecteurs du plan.

$(\vec{u} \perp \vec{v})$ équivaut à $(xx' + yy' = 0)$