

CALCUL LITTÉRAL (PARTIE 2)

I – Équations « produit »



« Règle du produit nul »

| a et b sont des nombres ou des expressions. Si $ab = 0$, alors $a = 0$ ou $b = 0$.



Définition

| Une équation produit nul est une équation de la forme $(ax + b)(cx + d) = 0$ dans laquelle a, b, c et d des nombres.



Méthode (RÉSoudre UNE Équation PRODUIT NUL)

On veut résoudre l'équation $(4x + 8)(3x - 21) = 0$.

D'après la règle du produit nul, on doit résoudre : ← On cite la règle du produit nul

$$\begin{aligned} 4x + 8 &= 0 \\ 4x + 8 &= 0 \\ 4x + 8 - 8 &= 0 - 8 \\ 4x &= -8 \\ \frac{4x}{4} &= \frac{-8}{4} \\ x &= -2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ou} \quad 3x - 21 &= 0 \\ 3x - 21 &= 0 \\ 3x - 21 + 21 &= 0 + 21 \\ 3x &= 21 \\ \frac{3x}{3} &= \frac{21}{3} \\ x &= 7 \end{aligned}$$

← On écrit les deux équations à résoudre

On résout séparément les deux équations

Donc $\mathcal{S} = \{-2; 7\}$ ← On n'oublie pas l'ensemble des solutions (généralement il y en a deux)

Exemple 1 : On souhaite résoudre l'équation $(10x + 4)(6x - 18) = 0$

Réponse : D'après la règle du produit nul, on doit résoudre : $10x + 4 = 0$ ou $6x - 18 = 0$

$$\begin{aligned} 10x + 4 &= 0 \\ 10x + 4 - 4 &= 0 - 4 \\ 10x &= -4 \\ \frac{10x}{10} &= \frac{-4}{10} = -0,4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 6x - 18 &= 0 \\ 6x - 18 + 18 &= 0 + 18 \\ 6x &= 18 \\ \frac{6x}{6} &= \frac{18}{6} = 3 \end{aligned}$$

Donc $\mathcal{S} = \{-0,4; 3\}$.

Exemple 2 : On souhaite résoudre l'équation $13x(2x + 1) = 0$

Réponse : D'après la règle du produit nul, on doit résoudre : $13x = 0$ ou $2x + 1 = 0$

$$\begin{aligned} 13x &= 0 \\ \frac{13x}{13} &= \frac{0}{13} \\ x &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2x + 1 &= 0 \\ 2x + 1 - 1 &= 0 - 1 \\ 2x &= -1 \\ \frac{2x}{2} &= \frac{-1}{2} = -0,5 \end{aligned}$$

Donc $\mathcal{S} = \{-0,5; 0\}$.



ATTENTION !!!

§ Dans l'ensemble solution, on écrit toujours les nombres dans l'ordre croissant!

Oral :
14, 21 p. 30

En classe :
56 p. 33 + 2 p. 29

À la maison :
57, 58, 59 p. 33 + 3, 4 p. 29

II – Équations carrées



Propriété

L'équation $x^2 = a$, où a un nombre positif admet exactement deux solutions : $\sqrt{a}$ et $-\sqrt{a}$.

Exemple (1) : On souhaite résoudre l'équation $x^2 = 49$

Réponse :

$x^2 = 49$ est une équation carrée : ses solutions sont $x = \sqrt{49} = 7$ ou $x = -\sqrt{49} = -7$.

Donc $\mathcal{S} = \{-7 ; 7\}$.

Exemple (2) : On souhaite résoudre l'équation $x^2 = 2$

Réponse :

$x^2 = 2$ est une équation carrée : ses solutions sont $x = \sqrt{2}$ ou $x = -\sqrt{2}$.

Donc $\mathcal{S} = \{-\sqrt{2} ; \sqrt{2}\}$.

Exemple (3) : On souhaite résoudre l'équation $x^2 = \frac{3}{4}$

Réponse :

$x^2 = \frac{3}{4}$ est une équation carrée : ses solutions sont $x = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ou $x = -\sqrt{\frac{3}{4}} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Donc $\mathcal{S} = \left\{-\frac{\sqrt{3}}{2} ; \frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$.



Propriété

Une équation carrée de la forme $x^2 = a$, où a est un nombre admet :

- exactement deux solutions lorsque $a > 0$,
- exactement une solution lorsque $a = 0$,
- aucune solution lorsque $a < 0$.

III – Équations plus compliquées

1. Équations du premier degré



Méthode (RÉSOLVRE UNE ÉQUATION DU PREMIER DEGRÉ)

1. S'il y a des parenthèses, on les élimine (par exemple en développant).
2. S'il y a des membres de la famille des x à droite, on les réduit en un seul, puis on applique le « principe de la balance » (avec + ou -) pour l'annuler (et le faire apparaître à gauche).
3. S'il y a des membres de la famille des nombres à gauche, on les réduit en un seul, puis on applique le « principe de la balance » (avec + ou -) pour l'annuler (et le faire apparaître à droite).
4. Il ne reste plus qu'une seule opération ($\times$ ou $\div$) que l'on simplifie en appliquant le « principe de la balance » (avec $\times$ ou $\div$).
5. On n'oublie pas d'écrire l'ensemble solution.

Exemple : On souhaite résoudre l'équation $8(x + 2) = 6x - 8$.

$$\begin{array}{lcl}
 8 \times x + 8 \times 2 & = & 6x - 8 \quad \text{① On développe} \\
 8x + 16 - 6x & = & 6x - 8 - 6x \quad \text{② On ne veut que des nombres à droite du =} \\
 2x + 16 & = & -8 \\
 2x + 16 - 16 & = & -8 - 16 \quad \text{On doit faire disparaître le +3 à gauche} \\
 2x & = & -24 \\
 \frac{2x}{2} & = & \frac{-24}{2} \quad \text{On doit faire disparaître le 2 devant le x à gauche} \\
 x & = & -12
 \end{array}$$

③ On ne veut que des x à gauche du =

④ On veut x tout seul

Donc $S = \{-12\}$.

■ **EXERCICE :** Résoudre l'équation $7x - 13 = 10x - 9$.

Solution :

$$\begin{array}{lcl}
 7x - 13 & = & 10x - 9 \\
 7x - 13 - 10x & = & 10x - 9 - 10x \\
 -3x - 13 & = & -9 \\
 -3x - 13 + 13 & = & -9 + 13 \\
 -3x & = & 4 \\
 \frac{-3x}{-3} & = & \frac{4}{-3} \\
 x & = & -\frac{4}{3}
 \end{array}$$

Donc $S = \left\{-\frac{4}{3}\right\}$.

Oral :
13 p. 30

En classe :
43, 46, 48 p. 32 + 54 p. 33

À la maison :
44, 45, 47, 49, 50 p. 32 + 55 p. 33

2. Quand la méthode ne fonctionne pas

Souvent, pour résoudre certaines équations, il faut se ramener à un type d'équation qu'on sait résoudre. Pour cela il faut utiliser les outils suivants : réduction, développement ou factorisation.

Exemple 1 : On souhaite résoudre l'équation $(8x - 5)^2 - 49 = 0$.

Réponse :

$$\begin{array}{lcl}
 (8x - 5)^2 - 49 & = & 0 \\
 (8x - 5)^2 - 7^2 & = & 0 \quad \text{← On fait apparaître l'IR n°3} \\
 ((8x - 5) - 7)((8x - 5) + 7) & = & 0 \quad \text{← On factorise} \\
 (8x - 5 - 7)(8x - 5 + 7) & = & 0 \\
 (8x - 12)(8x + 2) & = & 0
 \end{array}$$

$$\begin{array}{lcl}
 8x - 12 & = & 0 \\
 8x - 12 + 12 & = & 0 + 12 \\
 \frac{8x}{8} & = & \frac{12}{8} \\
 x & = & \frac{3}{2}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{lcl}
 8x + 2 & = & 0 \\
 8x + 2 - 2 & = & 0 - 2 \\
 \frac{8x}{8} & = & \frac{-2}{8} \\
 x & = & -\frac{1}{4}
 \end{array}$$

D'après la règle du produit nul, on doit résoudre :

Donc $\mathcal{S} = \left\{-\frac{1}{4}; \frac{3}{2}\right\}$.

Exemple 2 : On souhaite résoudre l'équation $(4x + 3)^2 = 16x^2 + 5x - 1$

Réponse :

$$\begin{aligned}
 (4x + 3)^2 &= 16x^2 + 5x - 1 \\
 (4x)^2 + 2 \times 4x \times 3 + 3^2 &= 16x^2 + 5x - 1 \quad \leftarrow \text{On développe avec l'IR ①} \\
 16x^2 + 24x + 9 &= 16x^2 + 5x - 1 \\
 16x^2 + 24x + 9 - 16x^2 &= 16x^2 + 5x - 1 - 16x^2 \\
 24x + 9 &= 5x - 1 \\
 24x + 9 - 5x &= 5x - 1 - 5x \\
 19x + 9 &= -1 \\
 19x + 9 - 9 &= -1 - 9 \\
 19x &= -10 \\
 \frac{19x}{19} &= \frac{-10}{19} \\
 x &= -\frac{10}{19}
 \end{aligned}$$

Donc $\mathcal{S} = \left\{ -\frac{10}{19} \right\}$.

Oral :

—

En classe :

60 p. 33

À la maison :

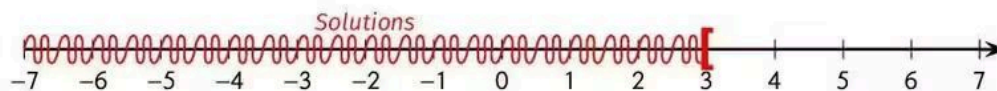
61, 62 p. 33

IV – Inéquations

1. Inégalité et représentation graphique

Exemple 1 : Représenter l'ensemble des nombres x qui vérifient $x < 3$

Réponse :

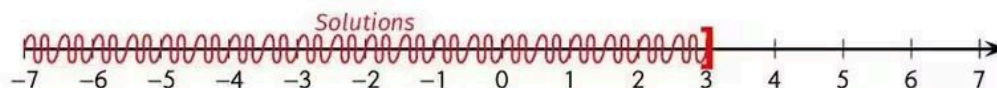


Remarque

Le crochet n'est pas "tourné" vers les solutions car x ne peut pas être égal à 3 (symbole $<$).

Exemple 2 : Représenter l'ensemble des nombres x qui vérifient $x \leq 3$

Réponse :

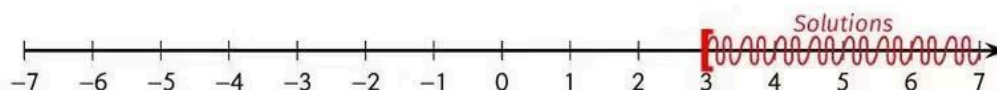


Remarque

Le crochet est cette fois "tourné" vers les solutions car x peut être égal à 3 (symbole $\leq$).

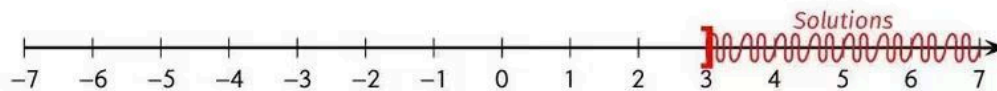
Exemple 3 : Représenter l'ensemble des nombres x qui vérifient $x \geq 3$

Réponse :



Exemple 4 : Représenter l'ensemble des nombres x qui vérifient $x > 3$

Réponse :



Oral :

En classe :

À la maison :
65 p. 33

2. Résoudre une inéquation



Méthode (RÉSOUTRE UNE INÉQUATION)

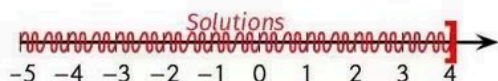
On utilise la même méthode que pour les équations avec deux différences :

- On change le sens de l'inégalité quand on divise (ou multiplie) par un nombre négatif à l'étape 4.
- On représente les solutions sur une droite graduée.

Le plus simple pour bien comprendre est de voir plusieurs exemples :

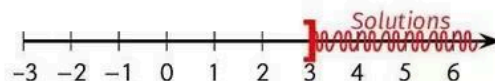
Exemple 1 : On veut résoudre : $x + 5 \leq 9$:

$$\begin{aligned} x + 5 &\leq 9 \\ x + 5 - 5 &\leq 9 - 5 \\ x &\leq 4 \end{aligned}$$



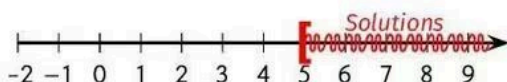
Exemple 2 : On veut résoudre : $x - 5 > -2$:

$$\begin{aligned} x - 5 &> -2 \\ x - 5 + 5 &> -2 + 5 \\ x &> 3 \end{aligned}$$



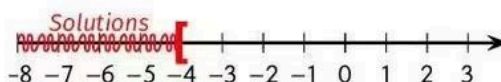
Exemple 3 : On veut résoudre $4x \geq 20$:

$$\begin{aligned} 4x &\geq 20 \\ \frac{4x}{4} &\geq \frac{20}{4} && \left. \begin{array}{l} \text{On ne change pas le sens de l'inégalité} \\ \text{car on divise par un nombre positif} \end{array} \right\} \\ x &\geq 5 \end{aligned}$$



Exemple 4 : On veut résoudre $-2x > 8$:

$$\begin{aligned} -2x &> 8 \\ \frac{-2x}{-2} &< \frac{8}{-2} && \left. \begin{array}{l} \text{On change le sens de l'inégalité car} \\ \text{on divise par un nombre négatif} \end{array} \right\} \\ x &< -4 \end{aligned}$$



Exemple 5 : On veut résoudre $10x - 4 \leq 26$:

$$\begin{aligned} 10x - 4 + 4 &\leq 26 + 4 \\ 10x &\leq 30 \\ \frac{10x}{10} &\leq \frac{30}{10} \\ x &\leq 3 \end{aligned}$$



Exemple 6 : On veut résoudre $-5x + 7 > 8$:

$$\begin{aligned} -5x + 7 - 7 &> 8 - 7 \\ -5x &> 10 \\ \frac{-5x}{-5} &< \frac{10}{-5} && \left. \begin{array}{l} \text{On change le sens de l'inégalité car} \\ \text{on divise par un nombre négatif} \end{array} \right\} \\ x &< -2 \end{aligned}$$



Oral :

15, 16, 17, 27 p. 30

En classe :

67, 70 p. 33

À la maison :

68, 69, 71 p. 33

V – Résoudre des problèmes



Méthode (RÉSOUTRE DES PROBLÈMES)

1. Choix de l'inconnue,
2. Mise en (in)équation,
3. Résolution de l'(in)équation,
4. Phrase de conclusion.

■ **EXERCICE** : Un vidéo-club propose deux formules de location de DVD :

- Formule A : abonnement d'un an pour 18 €, puis 3,5 € par DVD loué.
- Formule B : sans abonnement, 5 € par DVD loué.

À partir de combien de DVD loués dans l'année a-t-on intérêt à choisir la formule A ?

Solution :

- Choix de l'inconnue : x représente le nombre de DVD loués.
- Mise en inéquation :
Montant d'un an d'abonnement avec la formule A : $18 + 3,5x$
Montant d'un an d'abonnement avec la formule B : $5x$
On cherche quand le montant de l'abonnement avec la formule A est avantageux, c'est-à-dire quand il coûte moins cher que l'abonnement avec la formule.
On doit donc résoudre : $18 + 3,5x \leq 5x$.
- Résolution de l'inéquation :

$$\begin{aligned}18 + 3,5x &\leq 5x \\18 + 3,5x - 3,5x &\leq 5x - 3,5x \\18 &\leq 1,5x \\18 \div 1,5 &\leq 1,5x \div 1,5 \\12 &\leq x\end{aligned}$$

- Conclusion : On a intérêt à choisir l'abonnement A si on loue 12 DVD ou moins dans l'année (et donc l'abonnement B à partir de 13 DVD loués).

■ **EXERCICE** : Pendant la période estivale, un marchand de glaces a remarqué qu'il dépensait 75 € pour faire, en moyenne, 150 glaces.

Sachant qu'une glace est vendue 2,50 €, combien doit-il vendre de glaces au minimum dans la semaine pour avoir un bénéfice supérieur à 76 € ?

Solution :

- On note x le nombre de glaces vendues dans la semaine.
- Mise en inéquation :
Bénéfice de la semaine : $2,5x - 75$
On veut que ce bénéfice soit supérieur à 76 €, cela se traduit donc par l'inéquation : $2,5x - 75 > 76$.
- Résolution de l'inéquation :

$$\begin{aligned}2,5x - 75 &> 76 \\2,5x - 75 + 75 &> 76 + 75 \\2,5x &> 151 \\2,5x \div 2,5 &> 151 \div 2,5 \\x &> 60,4\end{aligned}$$

- Conclusion : le marchand devra vendre au moins 61 glaces pour faire un bénéfice supérieur à 76 € dans la semaine.

Oral :

–

En classe :

72 p. 33

À la maison :

74, 75 p. 34

Tâche complexe : 111 p. 38